This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

LELAND STANFORD JUNIOR UNIVERSITY
ORGANIZED 1891
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

Dieses Buch wird der Stanford University gegen Tausch übergeben.
7.3.1950. Prof. N. Hofreiter
MATHEM. SEMINAR
UNIVERSITÄT WIE
1983

# FIGURES
# D'ÉQUILIBRE
D'UNE
# MASSE FLUIDE

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

# FIGURES D'ÉQUILIBRE

D'UNE

# MASSE FLUIDE

*Leçons professées à la Sorbonne en 1900*

PAR

H. POINCARÉ
Membre de l'Institut

RÉDIGÉES PAR L. DREYFUS
Ancien élève de l'École normale supérieure.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

# FIGURES D'ÉQUILIBRE

## D'UNE MASSE FLUIDE

---

## CHAPITRE PREMIER

### THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LE POTENTIEL NEWTONIEN

***Objet du cours.*** — Nous allons étudier la figure d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation : les seules forces auxquelles est soumis le système sont des forces intérieures dues à l'attraction newtonienne : deux points s'attirent en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance. Nous allons d'abord rappeler quelques résultats connus sur le potentiel newtonien.

***Définition et propriétés du potentiel.*** — Un point de masse $m$, soumis à l'attraction de tout le reste du système, est soumis à une force dérivant d'un potentiel V, c'est-à-dire que les composantes, suivant les axes de coordonnées, de la force agissant sur ce point, sont les dérivées partielles d'une même fonction

$$m\frac{\partial V}{\partial x},\quad m\frac{\partial V}{\partial y},\quad m\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Si les masses attirantes sont discontinues, le potentiel a pour expression

$$V=\sum\frac{m_i}{r_i}$$

en appelant $r_i$ la distance du point de masse $m$ au point de masse $m_i$.

Si ces masses sont continues, le potentiel a pour expression

$$V = \int \frac{\rho' d\tau'}{r},$$

$\rho'$ étant la densité de l'élément de volume $d\tau'$, $r$ étant sa distance au point $m$, et l'intégrale étant étendue à tout le volume attirant. On sait que l'intégrale a un sens.

Si la masse attirante est répandue sur une surface, avec une densité superficielle $\mu'$, le potentiel a pour expression

$$V = \int \frac{\mu' d\sigma'}{r}.$$

Enfin, si c'est un volume infiniment mince d'épaisseur $\varepsilon'$, alors

$$d\tau' = \varepsilon' d\sigma',$$

et le potentiel est

$$V = \int \frac{\varepsilon' \rho' d\sigma'}{r}.$$

Pour un volume, en dehors des masses attirantes, V est une fonction continue, ainsi que ses dérivées premières, dans tout l'espace, et on sait que l'on a

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

A l'intérieur, en un point de densité $\rho$, on a

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

Les dérivées secondes sont discontinues en une surface de séparation de deux milieux différents.

Pour une surface, V est continue dans tout l'espace, mais ses dérivées ne le sont pas sur la surface elle-même.

Sur la normale en un point A d'une surface S (fig. 1), prenons deux longueurs

$$AB = dn_e, \qquad AC = dn_i.$$

Si $V_A$ est le potentiel en A, le potentiel en B et C est

$$V_B = V_A + \frac{\partial V}{\partial n_e} dn_e,$$

$$V_C = V_A + \frac{\partial V}{\partial n_i} dn_i.$$

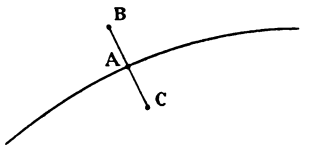


Fig. 1.

On a d'ailleurs

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} + \frac{\partial V}{\partial n_i} = -4\pi\mu,$$

$\mu$ étant la densité de la masse attirante.

Si l'on désigne par $l$, $m$, $n$ les cosinus directeurs de la normale, supposée dirigée vers l'extérieur, par

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_e, \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_e, \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_e; \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_i, \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_i,$$

les valeurs des dérivées partielles à l'intérieur et à l'extérieur de la surface, on a

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} = l\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_e + m\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_e + n\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_e,$$

$$-\frac{\partial V}{\partial n_i} = l\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_i + m\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_i + n\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_i.$$

***Théorème de Gauss.*** — Gauss a démontré que, en dehors des masses attirantes, V n'a ni maximum ni minimum, puisque l'on a $\Delta V = 0$.

D'une façon générale, si $\Delta V$ est positif ou nul, la fonction V n'a pas de maximum; si $\Delta V$ est négatif ou nul, il n'y a pas de minimum. Dans le cas qui nous occupe, $\Delta V$ est nul ou négatif: V n'a pas de minimum et n'a pas de maximum en dehors des masses agissantes.

Donc, si sur une surface fermée ne renfermant pas de masses attirantes, V est compris entre deux nombres $g$ et $h$, il en résulte qu'en tout point situé à l'intérieur de la surface, on aura $g < V < h$.

***Théorème de Green.*** — Si U et V sont deux fonctions continues à l'intérieur d'un volume T limité par une surface S, on a l'égalité

$$(1)\qquad \int_S U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma = \int_T U\Delta V d\tau + \int_T \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) d\tau.$$

Dans cette égalité, on peut permuter U et V, et en retranchant les deux égalités obtenues, on a

$$(2)\qquad \int_S \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma = \int_T (U\Delta V - V\Delta U)\, d\tau.$$

Cas particuliers de l'égalité (1) : faisons $U = 1$.

$$(3)\qquad \int_S \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = \int_T \Delta V d\tau.$$

Faisons :

$$U = V$$

$$(4)\qquad \int_S V\frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = \int_T V\Delta V d\tau + \int_T \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

Si V est une fonction satisfaisant à l'équation de Laplace, $\Delta V = 0$,

$$(5)\qquad \int_S V\frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau;$$

le second membre étant positif, le premier l'est aussi.

Si U et V sont des potentiels, sur une sphère de rayon suffi-

samment grand, U et V sont de l'ordre de $\frac{1}{R}$, leurs dérivées premières de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$. On peut alors appliquer la formule (1) à l'espace extérieur à une surface S et intérieur à une sphère de rayon très grand. Si ce rayon est suffisamment grand, l'intégrale prise sur la surface de la sphère $\varphi$ est négligeable : c'est-à-dire est de l'ordre de $\frac{1}{R}$ ; mais on a la relation

$$\int_S U \frac{\partial V}{\partial n_e} d\sigma + \int_S U \frac{\partial V}{\partial n_i} d\sigma = 0$$

car les éléments de l'intégrale se détruisent deux à deux.

Quant aux intégrales des seconds membres, leur somme donne des intégrales étendues à l'espace entier, et on a, en ajoutant les deux égalités obtenues :

$$(6) \qquad \int U \Delta V d\tau + \int \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) d\tau = 0,$$

les intégrales étant étendues à tout l'espace.

De même, la formule (2) donnera

$$\int (U \Delta V - V \Delta U) d\tau = 0 ;$$

et, en se rappelant que

$$- \Delta V = 4\pi\rho$$
$$- \Delta V_1 = 4\pi\rho_1,$$

on a

$$(7) \qquad \int (V_1 \rho - V \rho_1) d\tau = 0$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace.

Cette formule est analogue à celle que l'on trouve dans la théorie de l'électricité,

$$\sum mV_1 - \sum m_1 V = 0.$$

Dans la formule (7), faisons

$$V_1 = V + dV, \qquad \rho_1 = \rho + d\rho;$$

on en conclut la formule

$$(8) \qquad \int (V d\rho - \rho dV)\, d\tau = 0.$$

***Travail de l'attraction.*** — Supposons un système de masses $m'$, $m''$, ..., etc. attirées par un autre $m'_1$, $m''_1$, ...., etc.

Soit $V'_1$, $V''_1$,... le potentiel aux points $m'$, $m''$,..., etc., dû aux masses attirantes $m'_1$, $m''_1$, ..., etc.

$V'$, $V''$..., le potentiel aux points $m'_1$, $m''_1$..., dû aux points $m'$, $m''$, .....

Les masses attirées se déplaçant, on a comme travail

$$\varepsilon = \sum m \left( \frac{\partial V_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V_1}{\partial z} \delta z \right)$$

en appelant $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, le déplacement du point de masse $m$;

$$\varepsilon = \sum m \delta V_1.$$

Si je pose

$$H = \sum m V_1,$$

j'aurai

$$\varepsilon = \delta H.$$

Si les masses attirantes se déplacent aussi, mais seules, le potentiel $V_1$ deviendra

$$V_1 + \delta' V_1$$

et on a

$$\delta' \mathrm{H} = \sum m \delta' \mathrm{V}_1.$$

Si les deux déplacements ont lieu simultanément, on a

$$\varepsilon = \delta \mathrm{H} + \delta' \mathrm{H}.$$

Supposons que les masses attirées forment un volume T, on a

$$\mathrm{H} = \int_{\mathrm{T}} \rho \mathrm{V}_1 d\tau,$$

cette intégrale pouvant d'ailleurs s'étendre à l'espace entier, puisque $\rho$ est nul en dehors de T. On a

$$\delta \mathrm{H} = \int \mathrm{V}_1 \delta \rho d\tau$$

étendue de même à l'espace entier.

Si la masse attirante est la même que la masse attirée, on a $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1$,

$$\delta \mathrm{H} = \int \mathrm{V} d\rho d\tau,$$

ce qui peut s'écrire en tenant compte de (8)

$$\delta \mathrm{H} = \int \rho \delta \mathrm{V} d\tau,$$

ou encore

$$\delta \mathrm{H} = \int \frac{\rho \delta \mathrm{V} + \mathrm{V} \delta \rho}{2} d\tau.$$

Posons maintenant

$$\mathrm{W} = \int \frac{\rho \mathrm{V}}{2} d\tau,$$

l'intégrale étant toujours étendue à tout l'espace; W est l'énergie du système.

On a

$$\delta W = \varepsilon.$$

On peut d'ailleurs écrire, puisque $\Delta V = -4\pi\rho$,

$$W = \frac{-1}{8\pi}\int V\Delta V d\tau$$

et, en tenant compte de (6),

$$(9) \qquad W = \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\tau,$$

l'intégrale étant toujours étendue à l'espace entier.

***Conditions d'équilibre.*** — Ceci étant rappelé, nous allons commencer l'étude du problème que nous nous sommes proposé.

Considérons une masse fluide, isolée de toute influence extérieure, tournant autour d'un axe fixe que nous prendrons comme axe $Oz$, d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire $\omega$; prenons les axes $Ox$ et $Oy$, invariablement liés à la masse fluide.

Soit $p$ la pression en un point $(x, y, z)$; $p$ ne dépend que de $x$, $y$, $z$, la force s'exerçant sur l'élément de volume $d\tau$ a pour composantes

$$X = \frac{\partial p}{\partial x}d\tau, \qquad Y = \frac{\partial p}{\partial y}d\tau, \qquad Z = \frac{\partial p}{\partial z}d\tau.$$

Écrivons les conditions d'équilibre relatif, en remarquant que l'accélération de Coriolis est nulle. Si on appelle X, Y, Z les composantes suivant les axes de coordonnées de la force agissant sur la molécule $(x, y, z)$, on a

$$\left\{\begin{aligned} X &= \rho\frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2\rho x, \\ Y &= \rho\frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2\rho y, \\ Z &= \rho\frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

et, en posant

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

on a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial U}{\partial x},$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{\partial U}{\partial y},$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial U}{\partial z},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right),$$
$$dp = \rho dU.$$

Cette relation montre que $\rho$ est uniquement fonction de $p$; U est par suite, aussi uniquement fonction de $p$ et, par suite, de $\rho$. On arrive alors au théorème suivant:

***Théorème.*** — *Quand une masse fluide, animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, est en équilibre relatif, les surfaces de niveau sont les surfaces d'égale pression, et aussi d'égale densité.*

A la surface de la masse, on a $p = 0$. Donc U est une constante. La surface libre est donc une surface de niveau.

S'il n'y a pas de rotation, on a $U = V$.

Dans le cas général on a $\Delta V = -4\pi\rho$. $\Delta V$ est donc simplement fonction de U.

Remarquons que la force totale $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ est en général normale aux surfaces de niveau, $U = C$.

Ces conditions d'équilibre sont nécessaires.

Une condition nécessaire et suffisante d'équilibre est que le travail résultant d'un déplacement virtuel soit nul. Ce travail comprend le travail de l'attraction, plus le travail dû à la force centrifuge.

Le premier a pour expression $\delta W$, que nous avons déjà étudié, le second a pour expression

$$\int \rho d\tau \left(\omega^2 x \delta x + \omega^2 y \delta y\right)$$

$$= \int \rho d\tau \, \delta \frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{2}$$

$$= \delta \frac{\omega^2}{2} \int \rho \left(x^2 + y^2\right) d\tau ;$$

et, si J est le moment d'inertie par rapport à $Oz$, le travail dû à la force centrifuge est

$$\delta \frac{\omega^2}{2} J.$$

La condition d'équilibre est donc

$$\delta W + \frac{\omega^2}{2} \delta J = 0$$

pour tout déplacement compatible avec les liaisons.

Cette condition n'implique pas nécessairement que

$$W + \frac{\omega^2}{2} J$$

soit maximum ; il faut encore d'autres conditions ; mais je dis que si cette fonction est maximum, l'équilibre est stable.

Soit T la force vive relative, on a l'égalité

$$T - \left(W + \frac{\omega^2}{2} J\right) = C^{te}.$$

Posons $W + \frac{\omega^2}{2} J = U$, et supposons que pour le maximum U soit égale à $U_0$.

On a

$$T - U = T_0 - U_0.$$

Si on donne maintenant à U une valeur $U < U_0$ et à $T_0$ une valeur $\alpha$, on aura

$$T - U = T_0 - U_0$$
$$T = \alpha - (U_0 - U).$$

La force vive dans les instants suivants sera inférieure à $T_0$, l'équilibre est donc stable.

***Relation entre la masse, le volume et la vitesse de rotation.*** — Une condition nécessaire de l'équilibre est, qu'en tout point de la surface libre, la force soit dirigée vers l'intérieur, autrement une partie se détacherait. Il faut donc $\frac{\partial U}{\partial n_e} < 0$ et par suite

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial n_e} d\sigma < 0.$$

La formule (3) transforme cette inégalité en la suivante :

$$\int_T \Delta U d\tau < 0.$$

Donc il faut que l'on ait

$$\int_T \Delta V d\tau + \int_T 2\omega^2 d\tau < 0$$

c'est-à-dire

$$-4\pi \int_T \rho d\tau + \int 2\omega^2 d\tau < 0.$$

En désignant le volume par T et la masse par M, il vient

$$-4\pi M + 2\omega^2 T < 0.$$

Dans le cas particulier où la densité est constante et égale à $\rho$, on a

$$2\omega^2 < 4\pi\rho.$$

Dans l'application de cette formule, il faut se rappeler que les unités sont telles que la force d'attraction newtonienne s'exprime par la formule

$$f = \frac{mm'}{r^2}.$$

# CHAPITRE II

## MASSE HOMOGÈNE FLUIDE

### LA MASSE EST SANS MOUVEMENT DE ROTATION

***Simplification des formules générales.*** — Etudions le cas particulier d'une masse homogène fluide et sans mouvement de rotation.

En appliquant les théorèmes généraux, on trouve que la surface libre doit être une surface équipotentielle $V = V_0$.

Si on prend la densité de la masse pour unité de densité, le potentiel en un point a pour expression

$$V = \int_\tau \frac{d\tau}{r}.$$

L'énergie est

$$\int_\tau \frac{\rho V d\tau}{2} = \int_\tau \frac{V d\tau}{2}.$$

V est continu dans tout l'espace ainsi qu'à la surface libre ; il est nul à l'infini ; à l'extérieur il n'a ni maximum ni minimum et est compris entre o et $V_0$ ; à l'intérieur il est supérieur à $V_0$ et a un maximum.

L'intégrale $\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$ étendue à une surface fermée entou-

rant le corps a pour valeur $\int \Delta V d\tau$, étendue au volume limité par cette surface, et on a $\int \Delta V d\tau = -4\pi \int \rho d\tau = -4\pi M$..

Ce théorème est encore vrai pour la surface limite, et il s'applique que le corps soit creux ou plein, et même si l'on a affaire à une distribution superficielle.

Comme enfin nous supposons le corps homogène et de densité 1, on a

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int_T \Delta V d\tau = -\int 4\pi\rho d\tau = -4\pi T$$

en désignant par T son volume, et par S une surface qui le renferme complètement, en particulier sa propre surface.

Si on porte sur la normale en M à la surface extérieure un segment $MM' = dn_e$ (fig. 2), le potentiel en M' a pour expression :

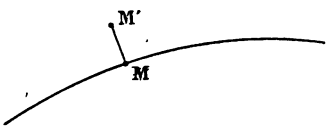

Fig. 2.

$$V_{M'} = V_M + \frac{\partial V}{\partial n} dn_e.$$

Or, on a

$$V_{M'} < V_M;$$

on en conclut que

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} < 0.$$

On a vu que cette condition était nécessaire pour l'équilibre : ici elle est toujours remplie.

Soit $V_0$ le potentiel de la masse fluide sur sa surface, et supposons maintenant une couche électrique de masse M, en équilibre à la surface du corps, et produisant dans l'espace un potentiel V' tel que sur la surface et à son intérieur le potentiel soit $V' = V_0$.

A l'extérieur, on a $V' = V$. En effet, sur la surface $V' = V_0$ et à l'infini $V' = 0$. Or V' et V sont deux fonctions satisfaisant à l'équation de Laplace, ayant les mêmes valeurs sur la surface et sur une sphère de rayon très grand. Ces deux fonctions coïncident donc : c'est le principe de Dirichlet.

On a, d'après des formules connues,

$$\int \frac{\partial V'}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi M.$$

On a d'ailleurs

$$\int \frac{\partial V'}{\partial n}\, d\sigma = \int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi T.$$

Donc la masse M répandue à la surface a pour valeur T et réciproquement si

$$M = T, \qquad V' = V.$$

Le rapport $\frac{T}{V_0}$ est ce que l'on appelle la capacité électrique du corps.

Cette notion va nous être utile pour résoudre le problème proposé.

***Théorie de Liapounoff.*** — Parmi les figures d'équilibre, il y a une solution évidente qui est la sphère : mais peut-il y avoir d'autres figures d'équilibre ? Nous n'en savons rien : mais si l'on se propose de chercher les figures d'équilibre stable, le problème est différent.

Le maximum absolu de W est bien atteint pour la sphère, mais *a priori* nous ne pouvons affirmer que W n'ait pas d'autres maximums relatifs. Cela a été démontré par Liapounoff; la démonstration est assez longue et on va procéder par étapes.

***L'énergie a un maximum.*** — Le potentiel d'un volume quelconque par rapport à un point quelconque, est inférieur au potentiel d'une sphère de même volume par rapport à son centre.

Du point M, comme centre, je décris la sphère Σ ayant le même volume que le corps S (fig. 3).

Le corps S est partagé en deux volumes : le volume K intérieur à Σ, et le volume A extérieur.

Soit B le volume de Σ extérieur à S.

On a par hypothèse $B = A$.

Si R est le rayon de la sphère, on a

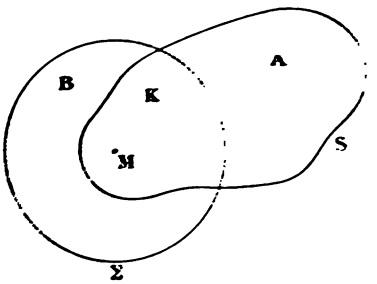


Fig. 3.

$$\text{Potentiel de } A < \frac{A}{R}$$

$$\text{Potentiel de } B > \frac{B}{R} = \frac{A}{R}$$

D'où

Potentiel de B > Potentiel de A

Potentiel de S = Potentiel de K + Potentiel de A

Potentiel de Σ = Potentiel de K + Potentiel de B.

Donc

$$\text{Potentiel de } \Sigma > \text{Potentiel de } S.$$

Si V est le potentiel au point M, et R le rayon de la sphère Σ, on a donc

$$V < 2\pi R^2.$$

L'énergie qui est égale à

$$\int \frac{V d\tau}{2}$$

est donc inférieure à

$$\pi R^2 \int d\tau;$$

et il vient

$$W < \pi R^2 T$$

en appelant T le volume de la masse.

On a d'ailleurs

$$T = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

d'après la définition de R.

Donc

$$W < \frac{4}{3}\pi^2 R^3$$

L'énergie W due à un volume T est donc limitée supérieurement ; W a donc un maximum. Je dis que ce maximum n'est atteint que si la surface extérieure est une sphère.

Nous allons d'abord démontrer le théorème suivant :

***La capacité électrostatique a un minimum.*** — De tous les corps ayant même volume, la sphère est celui qui a la moindre capacité électrostatique.

En effet, la formule (9) (p. 8) donne

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\tau,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace.

Supposons que sur un corps conducteur de volume T il y ait une masse électrique T en équilibre. Si V' est le potentiel correspondant, sur la surface du corps on a

$$CV' = T$$

par définition de la capacité C du conducteur.

A l'intérieur du corps, V' est constant ; à l'extérieur, V' satisfait à l'équation $\Delta V' = 0$ et est nul à l'infini.

L'énergie électrique est, d'après une formule connue de l'électricité :

$$W' = \frac{1}{2}CV'^2 = \frac{1}{2}\frac{T^2}{C}.$$

Elle est d'ailleurs égale à

$$W' = \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2\right]d\tau,$$

l'intégrale étant étendue, soit à tout l'espace, soit au volume

extérieur seulement, puisque V est constant à l'intérieur du volume.

Nous allons voir qu'elle est inférieure à l'énergie W due au potentiel newtonien du corps supposé homogène et de densité égale à l'unité.

Soit $V = V' + U$ ce potentiel : je pose

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\left\{\left[\frac{\partial(V'+U)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial(V'+U)}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial(V'+U)}{\partial z}\right]^2\right\} d\tau,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace.

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$$

$$+ \frac{2}{8\pi}\int\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V'}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}\right) d\tau$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

La première intégrale est $W'$.

La deuxième se décompose en deux : l'une prise à l'intérieur du corps, qui est nulle, puisque $\frac{\partial V'}{\partial x} = \frac{\partial V'}{\partial y} = \frac{\partial V'}{\partial z} = 0$.

L'autre, prise à l'extérieur, se transforme par la formule de Green en

$$\int_s V'\frac{\partial U}{\partial n_i}\, d\sigma - \int V'\Delta U d\tau.$$

La seconde de ces deux intégrales est nulle puisque $\Delta U$ est nul à l'extérieur.

La première est également nulle : en effet, sur la surface, $V'$ est constant et égal à $V'_0$.

L'intégrale est donc

$$V'_0 \int \frac{\partial U}{\partial n_e} d\sigma$$

$$= V'_0 \int_s \frac{\partial V}{\partial n_e} d\sigma - V'_0 \int \frac{\partial V'}{\partial n_e} d\sigma;$$

or

$$\int \frac{\partial V}{\partial n_e} d\sigma = 4\pi T,$$

$$\int \frac{\partial V'}{\partial n_e} d\sigma = 4\pi T;$$

cette intégrale est donc nulle.
On a par suite

$$\int \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) d\tau = 0.$$

La troisième n'est pas nulle, car U n'est pas nul à l'intérieur du corps, puisque V′ y est constant, et que V y varie.

La troisième intégrale est alors positive, et on a bien

$$W > W'.$$

On a donc, en réunissant les deux résultats précédents :

$$\pi R^2 T > W > \frac{T^2}{2C},$$

d'où

$$C > \frac{T}{2\pi R^2},$$

et enfin

$$C > \frac{2R}{3};$$

C a donc un minimum. Je dis que ce minimum ne peut être atteint que pour la sphère.

***Le minimum est atteint pour la sphère.*** — Supposons qu'un corps conducteur ait la forme pour laquelle ce minimum est atteint : on a

$$2W' = \frac{M^2}{C} = \frac{1}{4\pi}\int\left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

$\frac{\partial V'}{\partial n}$ désignant la dérivée suivant la normale à la surface équipotentielle passant par le point $(x, y, z)$,

$$2W' = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial V'}{\partial n}\right)^2 d\tau.$$

Déformons le conducteur de façon que l'élément de surface $d\sigma$ devienne $d\sigma'$ (fig. 4). Appelons $\zeta$ la projection sur la normale à la surface du déplacement $d\sigma$ compté avec son signe.

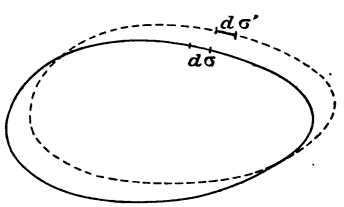

Fig. 4.

L'augmentation du volume est alors

$$\int \zeta d\sigma.$$

L'augmentation de l'intégrale est

$$\frac{M^2 dC}{C^2} = \int \frac{\zeta d\sigma}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2\right].$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial V'}{\partial n}\right)^2 \zeta d\sigma$$

Ceci suppose que le potentiel reste constant; mais, par hypothèse, la figure est en équilibre. Donc il y a un minimum pour

$\frac{M^2}{C}$ ; la variation de l'intégrale due à la variation du potentiel est donc nulle, puisque cette intégrale est minimum.

Or, si on appelle $\mu$ la densité superficielle, on a

$$\frac{\partial V'}{\partial n} = -4\pi\mu.$$

On a donc

$$\frac{M^2 dC}{C^2} = \int 4\pi\mu^2\zeta d\sigma$$

$$= 4\pi \int \mu^2\zeta d\sigma.$$

Or, il faut que $dC = 0$ : donc

$$\int \mu^2\zeta d\sigma = 0$$

et comme on doit avoir en même temps $\int \zeta d\sigma = 0$, quel que soit $\zeta$, il faut que l'on ait $\mu = C^{te}$.

On a d'ailleurs $M = \mu S$ en appelant S la surface du conducteur : on a donc

$$\frac{S^2 dC}{C^2} = 4\pi dT.$$

Supposons maintenant que le conducteur se déforme en restant semblable à lui-même : la capacité est proportionnelle à la racine cubique du volume, et on a

$$\frac{dC}{C} = \frac{1}{3}\frac{dT}{T};$$

d'où on conclut

$$S^2 = 12\pi TC.$$

Tous les corps dont la capacité est minimum sont donc tels

que cette relation existe entre leur capacité, leur volume et leur surface.

Mais alors, pour tous les corps de même volume, la capacité est minimum si la surface est minimum ; or, parmi tous les corps de même volume, la sphère est celui qui a la surface minimum. C'est donc celui dont la capacité électrostatique est minimum.

Nous arrivons maintenant au théorème que nous nous étions proposé de démontrer.

***La sphère est la seule figure d'équilibre.*** — Je dis que W est maximum quand le corps de volume T a la forme d'une sphère.

Soit T le volume correspondant, donnons-lui un accroissement (fig. 4)

$$dT = \int \zeta d\sigma.$$

Comme on a

$$W = \int \frac{\rho V}{2} d\tau,$$

$$dW = \int \frac{\rho dV + V d\rho}{2} d\tau$$

$$= \int V d\rho \, d\tau.$$

Le corps étant supposé de densité égale à 1, $d\rho$ est égal à $-1$, 0 ou 1 ; $d\rho$ n'est différent de zéro que dans le voisinage de la surface, qui est une surface équipotentielle, le corps étant supposé en équilibre ; c'est-à-dire que V est constant.

$$dW = V_0 \int d\rho \, d\tau$$

et l'intégrale est égale à $dT$. On a donc

$$dW = V_0 dT.$$

On peut établir une autre relation entre $dW$ et $dT$.

Supposons que le corps varie en restant semblable à lui-même : l'énergie varie en restant proportionnelle à la puissance $\frac{5}{3}$ du volume. On a donc

$$\frac{dW}{W} = \frac{5}{3}\frac{dT}{T}.$$

Eliminant $dW$ et $dT$ entre ces deux dernières relations, on trouve

$$W = \frac{3}{5} V_0 T.$$

D'après la définition de W, on voit que l'on peut appeler

$$\frac{2W}{T}$$

le potentiel moyen. Il est égal à

$$\frac{6}{5} V_0.$$

Or W est aussi donné par l'intégrale

$$\frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\tau$$

étendue à l'espace entier.

La partie étendue à l'espace intérieur est, d'après la formule de Green (4) :

$$\frac{1}{8\pi}\int_S V\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma - \frac{1}{8\pi}\int_T V\Delta V\,d\tau$$

Sur la surface, V est constant. L'intégrale a donc pour valeur

$$\frac{V_0}{8\pi}\int_S \frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma - \frac{1}{8\pi}\int_\tau V\Delta V d\tau,$$

ce que l'on transforme immédiatement, puisque $-\Delta V = 4\pi\rho = 4\pi$, en

$$\frac{V_0}{8\pi}\int \Delta V d\tau - \frac{1}{8\pi}\int V\Delta V d\tau$$

$$= -\frac{V_0}{2}\int d\tau + \int \frac{V d\tau}{2}$$

$$= -\frac{V_0 T}{2} + W$$

$$= -\frac{5}{6}W + W = \frac{1}{6}W.$$

La partie de l'intégrale étendue au volume intérieur est donc à la partie étendue au volume extérieur, dans le rapport constant $\frac{1}{5}$, en supposant évidemment le corps en équilibre.

Mais l'énergie de ce corps est en raison inverse de sa capacité électrostatique.

Nous voyons donc bien que la sphère est le volume pour lequel W est maximum.

### LA MASSE EST ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION.

***Formules générales.*** — Supposons maintenant le corps, homogène, soumis à une rotation $\omega$ autour d'un axe fixe.

Appelons J le moment d'inertie autour de cet axe.

$$J = \int d\tau\,(x^2 + y^2).$$

Si le corps change de forme, de façon que la projection du déplacement de l'élément de surface $d\sigma$ sur la normale soit $\zeta$, J varie et on a

$$dJ = \int \zeta d\sigma (x^2 + y^2).$$

Nous avons appelé U la fonction $V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$.

W représente toujours l'énergie due au potentiel newtonien.

On a

$$dW + \frac{\omega^2}{2} dJ = \int \zeta \left[ V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \right] d\sigma$$

$$= \int U \zeta d\sigma.$$

A la surface d'équilibre U est constant et égal à $U_0$.

On a donc

$$dW + \frac{\omega^2}{2} dJ = U_0 \int \zeta d\sigma = U_0 dT.$$

D'ailleurs si le corps se déforme en restant semblable à lui-même, W et J varient comme la puissance $\frac{5}{3}$ de T.

On a donc

$$\frac{dW + \frac{\omega^2}{2} dJ}{W + \frac{\omega^2}{2} J} = \frac{5}{3} \frac{dT}{T};$$

et par suite

$$\frac{3}{5} U_0 T = W + \frac{\omega^2}{2} J = U.$$

On a

$$\begin{aligned}\Delta U &= 2\omega^2 + \Delta V,\\ &= 2\omega^2 - 4\pi\rho,\\ &= 2\omega^2 - 4\pi.\end{aligned}$$

On a déjà vu (page 11) qu'une condition nécessaire pour l'équilibre est que

$$2\omega^2 \leqq 4\pi,$$

c'est-à-dire que $\Delta U$ soit négatif.

Donc U, à l'intérieur du corps, ne peut avoir de minimum, et comme sur la surface il est constant et égal à $U_0$, à l'intérieur on a $U > U_0$.

Si $\Delta U$ est nul, U est constant et égal à $U_0$.

Enfin si $\Delta U$ était positif, U serait dans tout le corps inférieur à $U_0$.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int U d\tau = 2W + \frac{\omega^2}{2} J.$$

Suivant que $\Delta U$ est négatif, nul ou positif, le premier membre est supérieur, égal ou inférieur à

$$\int U_0 d\tau = U_0 \int d\tau = U_0 T = \frac{5}{3}\left(W + \frac{\omega^2}{2} J\right).$$

On a donc dans les trois cas :

$$\Delta U < 0 \qquad \frac{5}{3}\left(W + \frac{\omega^2}{2} J\right) < 2W + \frac{\omega^2}{2} J \qquad W > \omega^2 J$$

$$\Delta U = 0 \qquad \frac{5}{3}\left(W + \frac{\omega^2}{2} J\right) = 2W + \frac{\omega^2}{2} J \qquad W = \omega^2 J$$

$$\Delta U > 0 \qquad \frac{5}{3}\left(W + \frac{\omega^2}{2} J\right) > 2W + \frac{\omega^2}{2} J \qquad W < \omega^2 J.$$

***Limite de la vitesse de rotation.*** — Supposons maintenant que $\omega$ varie d'une façon continue. La figure se déforme d'une manière continue, et on a

$$dW + \frac{\omega^2}{2} dJ + \omega J d\omega = \frac{3}{5} T dU_0.$$

La figure étant supposée en équilibre, $W + \frac{\omega^2}{2} J$ est maximum ou minimum, en tous cas

$$dW + \frac{\omega^2}{2} dJ = 0.$$

Il reste

$$\omega J d\omega = \frac{3}{5} T dU_0.$$

Donc

$$\frac{dU_0}{d\omega} > 0.$$

$U_0$ croît quand $\omega$ augmente.

V étant le potentiel newtonien, on a sur la surface

$$V = U_0 - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Si donc la surface rencontre l'axe de rotation, $U_0$ est le potentiel newtonien au pôle. Si $\omega$ croît, ce potentiel croît également. $U_0$ ne peut d'ailleurs dépasser $2\pi R^2$ (page 16), R étant le rayon de la sphère ayant même volume que la masse fluide.

En divisant membre à membre, on a

$$\frac{\omega J d\omega}{W + \frac{\omega^2}{2} J} = \frac{dU_0}{U_0}.$$

Si on fait croître $\omega$ indéfiniment, $\omega^2$ finira par dépasser $\pi$. W sera inférieur à $\omega^2 J$ ;

$$\frac{\omega^2 J}{\frac{\omega^2}{2} J + W} > \frac{2}{3}$$

et par suite

$$\frac{2}{3}\frac{d\omega}{\omega} < \frac{dU_0}{U_0}.$$

Si $\omega$ croît indéfiniment, $U_0$ devra croître indéfiniment ; mais $U_0$ ne peut dépasser $2\pi R^2$ ; il est donc nécessaire, ou bien que $\omega$ cesse de croître, ou bien que la surface d'équilibre ne rencontre plus l'axe ; on a alors une figure annulaire.

Nous verrons que parmi les figures d'équilibre, il y a des ellipsoïdes de révolution ou des ellipsoïdes à trois axes inégaux. Pour les premiers, $\omega$ est inférieur à $4\pi \times 0{,}112$. Pour les seconds, $\omega < 4\pi \times 0{,}093$.

Il est aussi possible qu'il existe une succession de figures d'équilibre, pour lesquelles $\omega$ passerait par une infinité de maximums ou de minimums. Ici, le raisonnement ne s'appliquerait plus et $\omega$ pourrait augmenter indéfiniment.

***Permanence de l'axe de rotation.*** — Jusqu'ici nous ne nous sommes préoccupés que d'un mouvement de rotation uniforme.

On pourrait se demander s'il peut y avoir des figures d'équilibre relatif pour une masse fluide animée d'un mouvement de rotation non uniforme.

Nous allons prouver que c'est impossible.

Nous pouvons d'abord supposer le centre de gravité du corps immobile; puisqu'il n'y a aucune force extérieure, son mouvement est un mouvement rectiligne et uniforme.

L'équilibre ne sera pas troublé si on ajoute une nouvelle liaison au corps, si on le solidifie. Alors le mouvement du solide autour de son centre de gravité est un mouvement à la Poinsot.

D'après le principe de Dalembert, le travail virtuel de la force totale, pour tout déplacement compatible avec les liaisons, est donc nul. Dans le cas qui nous occupe, il n'y a qu'une liaison, c'est l'incompressibilité du fluide, s'il s'agit d'un liquide. Si l'on a affaire à un gaz en équilibre, l'équilibre subsiste *a fortiori* en supposant le corps incompressible.

Si $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ représentent les déplacements virtuels d'un point

$x$, $y$, $z$, la condition d'incompressibilité s'exprime par la relation

$$\frac{d}{dx}\,\delta x + \frac{d}{dy}\,\delta y + \frac{d}{dz}\,\delta z = 0.$$

Il peut y avoir trois sortes de déplacements virtuels :

1° Les déplacements de toute la masse, considérés comme les déplacements d'un corps solide. L'application du principe de Dalembert montrerait que le corps doit avoir un mouvement à la Poinsot autour du centre de gravité, comme on l'a déjà vu.

2° Il y a les déformations du corps.

3° On peut supposer que la masse soit animée d'un mouvement tel que les molécules se déplaceraient sur des surfaces à densité constantes.

Les surfaces d'égale densité étant aussi des surfaces équipotentielles, on aurait

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z}\,\delta z = 0.$$

Les surfaces d'égale densité restant les mêmes, il en est de même de la forme extérieure. Tout se réduit donc à des déplacements internes dont nous allons étudier le travail virtuel.

Soit un point M de masse $m$, de coordonnées $x$, $y$, $z$, animé d'une vitesse $x'$, $y'$, $z'$, l'accélération du mouvement étant $x''$, $y''$, $z''$. La force d'inertie a pour composantes $mx''$, $my''$, $mz''$.

Appelons $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ les composantes de la rotation instantanée suivant les axes liés aux corps $Ox$, $Oy$, $Oz$.

D'après les formules connues, on a

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \omega_3 y - \omega_2 z, \\ y' &= \omega_1 z - \omega_3 x, \\ z' &= \omega_2 x - \omega_1 y. \end{aligned}\right.$$

L'accélération a pour composantes

$$\left\{\begin{aligned} x'' &= (\omega_3 y' - \omega_2 z') + (\omega'_3 y - \omega'_2 z), \\ y'' &= (\omega_1 z' - \omega_3 x') + (\omega'_1 z - \omega'_3 x), \\ z'' &= (\omega_2 x' - \omega_1 y') + (\omega'_2 x - \omega'_1 y). \end{aligned}\right.$$

L'équilibre relatif ayant lieu, il y a équilibre entre le travail de l'attraction et la force d'inertie $mx''$, $my''$, $mz''$.

Cette force se compose de deux parties : l'une est ce que l'on trouverait si l'on supposait le mouvement uniforme; l'autre est due à l'accélération du mouvement de rotation.

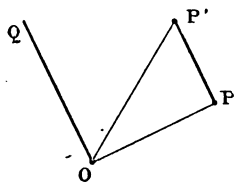

Fig. 5.

A un instant $t$, l'axe de rotation est OP $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ; à l'instant $t+dt$ l'axe instantané de rotation est OP′ (fig. 5). Le vecteur OQ équipollent au segment $\frac{PP'}{dt}$ tend, lorsque $dt$ tend vers zéro, vers une position limite, et ses projections sur les trois axes sont $(\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)$.

Si on prend cet axe OQ lui-même comme axe $Oz$

$$\omega'_1 = \omega'_2 = 0.$$

La force d'inertie due à l'accélération angulaire se réduit à $\omega'_3 y$, $-\omega'_3 z$, 0.

Appliquons maintenant le principe de Dalembert aux déplacements virtuels que nous considérons.

Le travail de l'attraction est nul, puisque la forme du corps n'a pas changé. Le travail de la force centrifuge est égal à $\frac{\omega^2}{2}\delta J$, en posant $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$.

Ce travail est nul puisque J ne varie pas.

Le travail de la troisième partie est

$$\omega'_3 \sum m(y\delta x - x\delta y).$$

Puisqu'il y a équilibre, il doit être nul. Or, on peut toujours choisir un déplacement virtuel tel que

$$\sum m(y\delta x - x\delta y)$$

ne soit pas nul; il suffit de supposer un courant autour de $Oz$. La somme aurait pour mesure l'aire du plan des $xoy$, limitée par la projection du courant sur ce plan.

Il faut donc que $\omega'_3$ soit nul, c'est-à-dire que l'on ait un mouvement de rotation uniforme. C. Q. F. D.

Il faut de plus que l'axe de rotation soit un des axes principaux d'inertie; cela résulte de l'étude du mouvement d'un corps solide.

***Stabilité de l'équilibre.*** — Jusqu'ici on ne s'est pas préoccupé des conditions de stabilité de l'équilibre.

Lejeune-Dirichlet a démontré que la condition nécessaire et suffisante de la stabilité de l'équilibre est que $W + \frac{\omega^2}{2} J$ soit maximum.

Mais il faut faire la distinction entre la stabilité temporaire et la stabilité séculaire. Lord Kelvin qui le premier a fait cette distinction, appelle stabilité séculaire celle qui a lieu même en tenant compte du frottement; tandis que la stabilité temporaire, qui subsiste quand on ne tient pas compte du frottement, ne subsiste plus si on en tient compte. Lord Kelvin a démontré que :

La condition nécessaire et suffisante de la stabilité séculaire de l'équilibre relatif est la condition de Dirichlet.

Evidemment cette condition est toujours suffisante ; mais supposons que $W + \frac{\omega^2}{2} J$ ne soit pas maximum, il pourra, d'après le théorème de L. Kelvin, y avoir équilibre stable, à condition qu'il n'y ait pas de frottement. Mais s'il y a un frottement, si petit qu'il soit, l'équilibre ne sera plus stable.

On ne peut appliquer immédiatement le théorème de L. Kelvin, car il suppose que tout mouvement détermine un frottement, ce qui n'est pas le cas pour cette masse fluide : en effet, si la masse isolée dans l'espace se déplace d'un bloc, à la façon d'un corps solide, il n'y aura pas de frottement.

***Solide équivalent.*** — Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de définir ce que nous appellerons le corps solide équivalent à la masse fluide. C'est un solide où, à l'instant considéré, les molécules ont la même position que dans le système fluide.

La vitesse de son centre de gravité est la même que pour le fluide.

1) Cf. Lamb Hydrodynamics [illegible] p. 366.

Les axes principaux d'inertie ayant évidemment la même position, les trois moments de rotation autour de ces axes sont les mêmes que pour la masse fluide.

Son mouvement est donc bien défini à l'instant considéré ; mais il faut remarquer que le solide équivalent à l'instant $t$, n'est pas le solide équivalent à l'instant $t'$.

***Théorème.*** — *La force vive du fluide est équivalente à la force vive du solide équivalent, augmentée de la force vive du fluide dans le mouvement relatif par rapport à des axes invariablement liés au solide équivalent.*

En effet, appelons $\xi$, $\eta$, $\zeta$, les composantes selon ces trois axes de la vitesse absolue de la molécule $m$ ; $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ les composantes de la vitesse de la molécule correspondante du solide équivalent ; $\xi''$, $\eta''$, $\zeta''$ les composantes de la vitesse relative de cette molécule par rapport au solide équivalent. On a

$$\begin{aligned}\xi &= \xi' + \xi'',\\ \eta &= \eta' + \eta'',\\ \zeta &= \zeta' + \zeta''.\end{aligned}$$

Les trois forces vives considérées ont pour expression :

$$\begin{aligned}T &= \sum \frac{m}{2}\left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\right),\\ T' &= \sum \frac{m}{2}\left(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2\right),\\ T'' &= \sum \frac{m}{2}\left(\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2\right),\end{aligned}$$

et il faut démontrer que

$$T = T' + T''.$$

On a

$$\begin{aligned}T &= \sum \frac{m}{2}\left[(\xi' + \xi'')^2 + (\eta' + \eta'')^2 + (\zeta' + \zeta'')^2\right]\\ &= T' + T'' + \sum m(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'').\end{aligned}$$

$$\gamma' = \frac{\omega^2}{2}\gamma$$

Je vais démontrer que

$$\sum m(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'') = 0.$$

Cette expression représente le travail d'un système de force S'', tel que la force agissant sur la molécule $m$ ait pour composantes $m\xi''$, $m\eta''$, $m\zeta''$, mais ce système est la différence de deux autres S et S', dont les forces sont $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$, et $m\xi'$, $m\eta'$, $m\zeta'$ ; ces deux systèmes de forces sont équivalents. La résultante générale est la même et les moments résultants des deux systèmes sont les mêmes par rapport aux trois axes, par la définition même du solide équivalent.

On a en effet

$$\sum m\xi = \sum m\xi'$$

puisque la vitesse du centre de gravité du solide équivalent est la même que celle de la masse fluide.

De même on a

$$\sum m(y\zeta' - z\eta') = \sum m(y\zeta - z\eta),$$

puisque les moments de rotation sont les mêmes autour des trois axes de coordonnées. Donc S = S' et S'' est nul ; son travail l'est aussi.

Par suite

$$\sum m(\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'') = 0.$$

***Condition de stabilité de Lejeune-Dirichlet.*** — Revenons maintenant à notre masse fluide.

On a l'égalité

$$T - W = C^{te}.$$

D'où

$$T' + T'' - W = C^{te}.$$

Cette égalité suppose qu'il n'y a pas de frottement : autrement $T' + T'' - W$ ira constamment en diminuant.

Si on pose

$$T' + T'' - W = \varepsilon,$$

$\frac{d\varepsilon}{dt}$ est nul s'il n'y a pas de frottement.

Mais alors c'est qu'il n'y a pas de mouvement relatif, et par suite $T'' = 0$.

Si $$T'' > 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} < 0.$$

Dans ce mouvement de rotation le théorème des aires s'applique, et on peut considérer comme des données les trois moments de rotation.

Je vais démontrer que la condition nécessaire et suffisante de stabilité est que $T' - W$ soit minimum.

Pour une position d'équilibre relatif, on aura

$$T' = T'_0$$
$$W = W_0$$
$$T'' = 0.$$

Si l'on part de cette position d'équilibre, et que l'on fasse varier très peu les éléments des mouvements des molécules, mais de façon que les moments de rotation ne soient pas altérés (c'est une restriction sur laquelle nous reviendrons), la masse fluide ne s'écartera pas beaucoup de la position d'équilibre.

En effet, soient $T'$ et $W$, les valeurs de la force vive et de l'énergie, on a

$$T' - W > T'_0 - W_0.$$

On a *a fortiori*

$$T' + T'' - W > T'_0 - W_0;$$

$T + T'' - W = \varepsilon$ est d'ailleurs voisin de $T'_0 - W_0$.

Cette quantité ne peut jamais croître, donc elle restera toujours voisine de $T'_0 - W_0$.

Les valeurs des variables ne diffèreront que très peu de leurs valeurs pour $T'_0$ et $W_0$, donc il y a équilibre stable : la condition est suffisante.

Elle est aussi nécessaire. En effet, si $T'_0 - W_0$ n'est pas minimum, je puis choisir $T'$ et $W$ de manière que

$$T' - W < T'_0 - W_0$$

et même que

$$T' + T'' - W < T'_0 - W_0,$$

$T''$ étant suffisamment petit.

Mais alors $T' + T'' - W$ ne peut que décroître ; $T''$ lui, tendra vers zéro ; $T'$ et $W$ ne pourront alors reprendre leurs valeurs primitives.

Il y a une restriction à lever. Supposons que l'on écarte le corps de sa position d'équilibre sans conserver la valeur des moments de rotation autour des axes principaux ; on sait alors que le solide équivalent aurait un mouvement où les moments de rotation auraient des valeurs peu différentes de celles qu'ils avaient précédemment et l'on est ramené au premier cas.

***L'axe de rotation est le petit axe de l'ellipsoïde d'inertie.*** — Je vais démontrer maintenant que l'équilibre n'est stable que si l'axe de rotation est le plus petit axe de l'ellipsoïde d'inertie relatif à la masse fluide.

Soient (fig. 6) $Oxyz$ un trièdre fixe de coordonnées ; OA, OB, OC, les axes principaux d'inertie ; $\omega$ la vitesse instantanée de rotation dont les composantes sont $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ suivant les trois axes fixes, $p$, $q$, $r$ suivant les axes OA, OB, OC ; on a

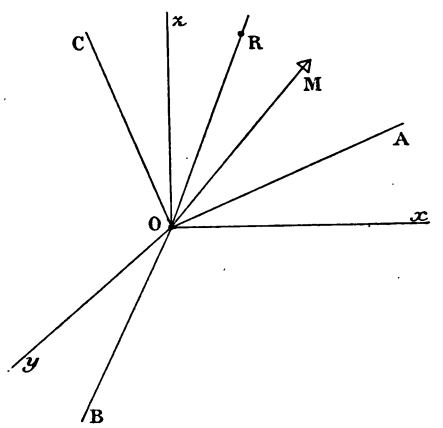

Fig. 6.

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Soit OR l'axe instantané de rotation, J le moment d'inertie par rapport à cet axe.

On a

$$T' = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{\omega^2}{2} J.$$

Soient $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, les moments de rotation par rapport aux trois axes de coordonnées. Le segment OM, dont les projections sont ($\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$), est fixe dans l'espace (théorème des aires), et l'on a

$$\mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = C^{te}.$$

Les projections de OM sur les axes OABC sont $Ap$, $Bq$, $Cr$, et l'on a encore

$$\mu^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2.$$

La condition de stabilité, comme nous l'avons dit, est que $T' - W$ soit minimum. Or, si on change l'orientation sans changer la forme du corps, W ne variera pas. Donc il faudra que $T'$ soit minimum. OM est fixe dans l'espace.

Si on pose

$$p\sqrt{A} = X,$$
$$q\sqrt{B} = Y,$$
$$r\sqrt{C} = Z.$$

On a

$$T' = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2)$$
$$\mu^2 = (AX^2 + BY^2 + CZ^2) = C^{te}.$$

Donc, le point X, Y, Z doit être sur un ellipsoïde donné et sur une sphère de rayon minimum. Donc l'axe instantané de rotation est le plus petit axe de l'ellipsoïde donné et par suite, de l'ellipsoïde d'inertie.

Si A est la plus grande des quantités A, B, C, l'axe de rotation sera l'axe des $x$. Alors on a $p = \omega$, $q = 0$, $r = 0$.

$$A = J,$$
$$T' = \frac{\mu^2}{2J}.$$

Il faut donc que

$$(1) \qquad W - T' = W - \frac{\mu^2}{2J}$$

soit maximum ; donc que

$$\delta\left(W - \frac{\mu^2}{2J}\right) = 0.$$

Il suffit aussi que

$$(2) \qquad \left(W + \frac{\omega^2}{2} J\right)$$

soit maximum (p. 10), condition qui n'est pas nécessaire.

Donc

$$\delta\left(W + \frac{\omega^2}{2} J\right) = 0.$$

Les deux conditions donnent :

$$(1) \qquad \delta W + \frac{\mu^2 \delta J}{2J^2} = 0,$$

$$(2) \qquad \delta W + \frac{\omega^2}{2} \delta J = 0.$$

On doit donc prévoir que si la condition (2) est remplie, la première le sera également.

Supposons qu'il en soit autrement, c'est-à-dire que l'on puisse avoir en même temps

$$\begin{cases} W + \dfrac{\omega^2}{2} J < W_0 + \dfrac{\omega^2}{2} J_0 \\ W - \dfrac{\mu^2}{2J} > W_0 - \dfrac{\mu^2}{2J_0}. \end{cases}$$

Comme on a $\mu = \omega J_0$, on conclurait facilement

$$W_0 - \frac{\omega^2 J_0}{2} < W - \frac{\omega^2}{2} \frac{J_0^3}{J}.$$

En additionnant membre à membre, on aurait

$$\frac{m^4}{4}(J - J_u)J = \frac{m^3}{4}(JJ_u - J_u^2),$$

d'où

$$J^4 - 4JJ_u + J_u^2 = 0,$$
$$(J - J_u)^4 = 0,$$

ce qui est absurde; mais la réciproque n'est pas vraie; la deuxième condition n'entraîne pas la première.

$U_n$ rz Kugel. — $\mathcal{P}_n$
$S_n$ rp fest $\mathcal{Y}_n$
$P_n$ Linie $X_n^{\circ}$
$P_{nv}$ $X_n^{v}$

# CHAPITRE III

## FONCTIONS SPHÉRIQUES

***Expression de* $\Delta V$ *dans un système triple orthogonal.*** — Soient

$$\xi(x, y, z) = \alpha,$$
$$\eta(x, y, z) = \beta,$$
$$\zeta(x, y, z) = \gamma,$$

trois familles de surfaces, constituant un système triple orthogonal.

Considérons le petit parallélépipède rectangle dont les faces sont les 6 surfaces.

$$\xi = \xi_0, \qquad \xi = \xi_0 + a d\xi,$$
$$\eta = \eta_0, \qquad \eta = \eta_0 + b d\eta,$$
$$\zeta = \zeta_0, \qquad \zeta = \zeta_0 + c d\zeta,$$

Les arêtes de ce parallélépipède ont pour longueurs

$$a d\xi, \; b d\eta, \; c d\zeta.$$

La diagonale est

$$ds^2 = a^2 d\xi^2 + b^2 d\eta^2 + c^2 d\zeta^2.$$

Supposons une fonction V ($\xi$, $\eta$, $\zeta$) et cherchons à déterminer la valeur de l''intégrale

$$\int \Delta V d\tau$$

étendue au volume du parallélépipède; elle est égale à

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$$

étendue à sa surface.

Le volume étant infiniment petit, la première intégrale a pour expression

$$\Delta V.a.b.c.d\xi.d\eta.d\zeta.$$

La seconde est la somme de trois intégrales étendues chacune aux deux faces opposées du volume.

Pour la face $\xi = \xi_0$, on a

$$-\frac{\partial V}{a\partial \xi} bcd\eta d\zeta.$$

Pour la face opposée $\xi = \xi_0 + d\xi$, on a

$$\left[\frac{bc}{a}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{bc}{a}\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) d\xi\right] d\eta d\zeta$$

et par suite pour l'ensemble des deux faces, on a

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{bc}{a}\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) d\eta d\zeta d\xi.$$

On a donc

$$\Delta V abc.d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$= d\xi\, d\eta\, d\zeta \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{bc}{a}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{ca}{b}\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{ab}{c}\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right]$$

et finalement on a

$$\Delta V = \frac{1}{abc}\sum \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{bc}{a}\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)$$

***Application aux coordonnées polaires.*** — Dans ce système on a

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = r \cos\theta, \end{cases}$$

et, en posant $\cos\theta = \mu$, on a

$$x = r\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,$$
$$y = r\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi,$$
$$z = r\mu.$$

L'élément linéaire dans ce système de coordonnées a pour expression

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$
$$= dr^2 + r^2 \frac{d\mu^2}{1-\mu^2} + r^2(1-\mu^2)d\varphi^2.$$

Au lieu de $\xi$, $\eta$, $\zeta$, nous avons $r$, $\mu$, $\varphi$ et dans ce système

$$a = 1,$$
$$b = \frac{r}{\sqrt{1-\mu^2}},$$
$$c = r\sqrt{1-\mu^2},$$
$$abc = r^2.$$

On calcule alors facilement

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial \mu}\right]$$
$$+ \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

***Polynomes sphériques. Fonctions sphériques.*** — On appelle *polynome sphérique* un polynome homogène en $x$, $y$, $z$ satisfaisant à l'équation de Laplace, $\Delta P = 0$.

S'il est de degré $n$ en $x$, $y$, $z$ il contient $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients arbitraires. Mais il y a un certain nombre de relations entre ces coefficients puisque l'on a $\Delta P_n = 0$. Cette relation est de degré $n-2$. Il y a donc $n\frac{(n-1)}{2}$ relations entre les coefficients.

Il y a donc

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1$$

polynomes sphériques, indépendants du degré $n$.

On peut exprimer $x$, $y$, $z$ en coordonnées polaires : on aura alors

$$P_n = r^n Y_n,$$

$Y_n$ étant uniquement une fonction de $\varphi$ et de $\mu$, que nous appelons fonction sphérique d'ordre $n$.

On a évidemment la relation

$$(1) \qquad r\frac{\partial P_n}{\partial r} = nP_n.$$

Considérons maintenant l'égalité (2) démontrée page 4

$$\int_S \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma = \int_\tau (U\Delta V - V\Delta U)\, d\tau.$$

Supposons que la surface S soit une sphère de rayon 1, que U et V soient deux polynomes sphériques d'ordre $m$ et $n$, le second membre sera nul, et on aura

$$\int \left[P_m \frac{\partial P_n}{\partial r} - P_n \frac{\partial P_m}{\partial r}\right] d\sigma = 0.$$

Donc, en tenant compte de l'égalité (1), on a

$$(m-n)\int_S P_m P_n\, d\sigma = 0.$$

Si $m$ est différent de $n$, on a

$$\int_S P_m P_n\, d\sigma = 0,$$

l'intégrale étant étendue à une sphère de rayon 1 ; et on peut encore écrire ceci :

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Y_m Y_n \, d\varphi \, d\mu = 0.$$

Si $m = n$, ce résultat n'est plus vrai.

***Fonctions sphériques fondamentales.*** — On a vu que l'on a

$$x = r\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi = r\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},$$

$$y = r\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi = r\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Si on remplace $x$ et $y$ par ces valeurs dans $P_n$, on aura

$$P_n = \sum_{p=-n}^{p=n} r^n e^{ip\varphi} X_n^p,$$

$X_n^p$ étant une fonction de $\mu$ seulement ; ce sera un polynome en $\mu$ et en $\sqrt{1-\mu^2}$. Les polynomes où $p$ est pair, ne contiendront $\sqrt{1-\mu^2}$ qu'à des puissances paires. Les polynomes où $p$ est impair, ne contiendront $\sqrt{1-\mu^2}$ qu'à des puissances impaires.

Les premiers seront donc des polynomes en $\mu$, les seconds seront des polynomes en $\mu$ multipliés par $\sqrt{1-\mu^2}$.

Substituons la valeur de P dans l'équation $\Delta P_n = 0$.

On obtient

$$\sum\left[n(n+1)r^{n-2}e^{ip\varphi}X_n^p + r^{n-2}e^{ip\varphi}\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dX_n^p}{d\mu}\right] - \frac{X_n^p p^2 r^{n-2} e^{ip\varphi}}{1-\mu^2}\right] = 0.$$

En annulant le coefficient de $r^{n-2}e^{ip\varphi}$, on obtient l'équation à laquelle doit satisfaire $X_n^p$. C'est

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dX_n^p}{d\mu}\right] - \frac{n(n+1)(\mu^2-1)+p^2}{1-\mu^2}X_n^p = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est une fonction transcendante, mais il y a une intégrale particulière qui est de l'une des deux formes exigées par la définition de $X_n^p$, et qui est déterminée à un facteur constant près.

On voit que $X_n^p$ et $X_n^{-p}$ satisfont à la même équation. On a donc

$$X_n^p = AX_n^{-p},$$

A étant une constante quelconque. On a ainsi la forme des $2n+1$ fonctions sphériques cherchées.

$$X_n^0,\ X_n^1 e^{i\varphi},\ X_n^2 e^{2i\varphi},\ldots,\ X_n^n e^{ni\varphi}\ldots,$$
$$X_n^1 e^{-i\varphi},\ X_n^2 e^{-2i\varphi},\ldots,\ X_n^n e^{-ni\varphi}\ldots,$$

On peut écrire autrement $2n+1$ fonctions indépendantes en posant

$$X_n^0,\quad X_n^1 \cos\varphi,\quad X_n^2 \cos 2\varphi,\ldots,\quad X_n^n \cos n\varphi,$$
$$X_n^1 \sin\varphi,\quad X_n^2 \sin 2\varphi,\ldots,\quad X_n^n \sin n\varphi.$$

Deux fonctions sphériques diffèrent donc soit par $n$, soit par $p$, soit que $n$ et $p$ soient égaux, mais que l'une contienne le sinus, l'autre le cosinus de $p\varphi$.

On a déjà démontré que

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} Y_m Y_n\, d\varphi$$

est nul si $m \neq n$; nous allons achever la démonstration et démontrer que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} YY' d\varphi$$

est nulle si Y et Y′ sont deux fonctions différentes.

Il suffit de le démontrer dans le cas de deux fonctions de même ordre.

On a alors

$$\int_{-1}^{+1} X_n^p X_n^q\, d\mu \int_0^{2\pi} \cos p\varphi \cos q\varphi\, d\varphi$$

ou bien

$$\int_{-1}^{+1} X_n^p X_n^q \, d\mu \int_0^{2\pi} \sin p\varphi \sin q\varphi \, d\varphi,$$

$$\int_{-1}^{+1} X_n^{p^2} \, d\mu \int_0^{2\pi} \sin p\varphi \cos p\varphi \, d\varphi.$$

Dans les trois cas, la seconde intégrale est nulle.

Enfin il est évident que

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} Y^2 d\varphi$$

est différent de zéro.

***Détermination des polynomes*** $X_n^p$. — Proposons-nous maintenant de déterminer $X_n^p$, et pour cela, commençons par le cas où $p = 0$.

L'équation est alors

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dX}{d\mu}\right] + n(n+1)X = 0.$$

C'est l'équation qui définit les polynomes de Legendre, et on a

$$X_n^0 = \frac{d^n}{d\mu^n}(1-\mu^2)^n.$$

$X_n^0$ (Cos $\theta$) est donc une fonction sphérique où $\theta$ représente l'angle d'une direction avec l'axe $Oz$.

Par raison de symétrie, $X_n^0$ (Cos $\varepsilon$), où $\varepsilon$ représente l'angle de la direction considérée avec une autre direction quelconque, mais fixe, sera aussi une fonction sphérique ; mais on a

$$\cos\varepsilon = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$$

et cela, quels que soient $\theta$ et $\theta'$.

Donc

$$X_n^0\left[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\right]$$

sera encore une fonction sphérique.

Si on pose

$$\sin\theta' e^{-i\varphi'} = 2\xi,$$
$$\sin\theta' e^{i\varphi'} = 2\eta,$$

d'où on conclut, en ajoutant membre à membre après avoir multiplié ces deux équations respectivement par $e^{i\varphi}$ et $e^{-i\varphi}$,

$$\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi') = \xi e^{i\varphi} + \eta e^{-i\varphi}$$

et en multipliant membre à membre,

$$\sin^2\theta' = 4\xi\eta\,;$$

d'où

$$\cos^2\theta' = 1 - 4\xi\eta\,;$$

la fonction

$$X_n^0\left[\sqrt{1-4\xi\eta}\,\mu - \sqrt{1-\mu^2}\,(\xi e^{i\varphi} + \eta e^{-i\varphi})\right]$$

est donc encore une fonction sphérique quels que soient $\xi$ et $\eta$.

En particulier, si on fait

$$\begin{cases}\xi = 1\\ \eta = 0,\end{cases}$$

$$X_n\left[\mu + \sqrt{1-\mu^2}\,e^{i\varphi}\right]$$

est une fonction sphérique.

Si je développe suivant la formule de Taylor, j'ai un polynome :

$$X_n\left[\mu + \sqrt{1-\mu^2}\,e^{i\varphi}\right] = X_n(\mu) + e^{i\varphi}\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{dX_n}{d\mu} + \ldots$$
$$+ \frac{e^{ip\varphi}(1-\mu^2)^{\frac{p}{2}}}{1.2\ldots p}\,\frac{d^pX_n}{d\mu^p} + \ldots + \frac{e^{in\varphi}(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}}{1.2\ldots n}\,\frac{d^nX_n}{d\mu^n}.$$

Chacun des termes de la somme est une fonction sphérique. On a donc défini les fonctions $X_n^p$ à un facteur près.

$$X_n^p = (1-\mu^2)^{\frac{p}{2}} \frac{d^p X_n^0(\mu)}{d\mu^p}$$
$$= (1-\mu^2)^{\frac{p}{2}} \frac{d^{n+p}(1-\mu^2)^n}{d\mu^{n+p}}.$$

***Propriétés des fonctions sphériques.*** — Soit U une fonction de $r$, et $P_n$ un polynome sphérique :

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Proposons-nous de calculer $\Delta(U P_n)$. On a

$$\Delta(UP_n) = P_n \Delta U + 2\sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial P_n}{\partial x} + U\Delta P_n,$$

mais

$$\Delta P_n = 0\,;\ \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dU}{dr}\cdot\frac{x}{r},$$

$$\Delta(UP_n) = P_n\left[\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr}\right]$$
$$+\frac{2}{r}\frac{dU}{dr}\left(x\frac{\partial P_n}{\partial x} + y\frac{\partial P_n}{\partial y} + z\frac{\partial P_n}{\partial z}\right)$$

et, parce que $P^n$ est une fonction homogène,

$$\Delta(UP_n) = P_n\left(\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr}\right) + \frac{2n}{r}P_n\frac{dU}{dr}$$
$$= P_n\left[\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2(n+1)}{r}\frac{dU}{dr}\right],$$

Proposons-nous maintenant de calculer

$$\Delta(UY_n) = \Delta\left[\frac{U}{r^n}\times P_n\right]$$

puisque $P_n = r^n Y_n$.

$$\Delta(UY_n) = P_n\left[\frac{1}{r^n}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r^{n+1}}\frac{dU}{dr} - \frac{n(n+1)U}{r^{n+2}}\right],$$
$$\Delta(UY_n) = Y_n\left[\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{n(n+1)U}{r^2}\right].$$

***Couche sphéroïdale.*** — Nous allons appliquer ce qui précède à l'étude d'une masse fluide sphéroïdale, c'est-à-dire d'une masse fluide dont la figure d'équilibre est peu différente d'une sphère, ou, d'une manière plus précise, dont la surface est comprise entre deux surfaces sphériques de rayons voisins. Une couche sphéroïdale sera une couche comprise entre deux surfaces sphéroïdales.

***Action d'une couche sphéroïdale.*** — Soit (fig. 7) $d\sigma$ l'élément de surface d'une couche de rayon 1, $\varepsilon$ l'épaisseur de la couche sphéroïdale, $d\tau$ l'élément de volume de la couche sphéroïdale; on a

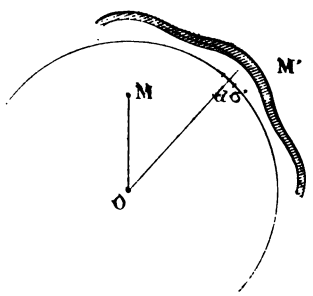

Fig. 7.

$$d\tau = \varepsilon d\sigma.$$

On peut supposer que la masse contenue dans $d\tau$ est sur l'élément $d\sigma$, et est représentée par $\mu d\sigma$.

Soit un point M dont les coordonnées cartésiennes sont $x$, $y$, $z$, les coordonnées sphériques

$$r, \quad \mu = \cos\theta, \quad \varphi.$$

Soit un point M′ dont les éléments analogues sont $x'$, $y'$, $z'$; $r' = 1$, $\mu' = \cos\theta'$, $\varphi'$.

La distance MM′ est égale à $1 + r^2 - 2r\cos(\mathrm{OM}, \mathrm{OM}')$.

$\cos\gamma = \cos(\mathrm{OM}, \mathrm{OM}') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$.

***Développement en série de*** $\frac{1}{\mathrm{MM}'}$. — Le potentiel en M, dû à la couche sphéroïdale, est

$$V = \int \frac{\varepsilon' d\sigma'}{\mathrm{MM}'},$$

$\varepsilon'$ est une fonction de $\mu$ et de $\varphi$; $r$ est plus petit que 1.

Or

$$\overline{\mathrm{MM}'}^2 = 1 - 2r\cos\gamma + r^2 = (1 - re^{i\gamma})(1 - re^{-i\gamma}),$$

$$\frac{1}{\mathrm{MM}'} = \left(1 - re^{i\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - re^{-i\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

On a

$$\left(1-re^{i\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}re^{i\gamma}+\frac{1.3}{2.4}r^2e^{2i\gamma}+\ldots$$
$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}r^ne^{ni\gamma}+\ldots$$

C'est une série absolument convergente pour $r<1$.

De même

$$\left(1-re^{-i\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}re^{-i\gamma}+\ldots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}r^ne^{-ni\gamma}+\ldots$$

Le produit de ces deux séries est une série encore convergente, si $r<1$ ; le coefficient du terme en $r^n$ est

$$A_n=\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}.e^{ni\gamma}+\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}.\frac{1}{2}e^{(n-2)i\gamma}$$
$$+\frac{1.3\ldots(2n-5)}{2.4\ldots(2n-4)}.\frac{1.3}{2.4}e^{(n-4)i\gamma}+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.e^{-ni\gamma}$$

Le coefficient du terme en $e^{pi\gamma}$ égale celui du terme en $e^{-pi\gamma}$.

On a donc un polynome à coefficients réels du cosinus de l'angle $\gamma$ et de ses multiples jusqu'à $n$ ; comme les coefficients de ce polynome sont tous positifs, ce polynome atteindra sa valeur maximum pour $\gamma=0$. Mais alors :

$$\frac{1}{MM'}=\frac{1}{1-r}=1+r+\ldots+r^n+\ldots$$

Donc les coefficients du développement sont inférieurs ou égaux à l'unité.

On peut donc écrire

$$\frac{1}{MM'}=\sum A_nr^n,$$

$A_n$ étant une fonction de $\mu$, de $\varphi$, de $\mu'$ et de $\varphi'$.

***Développement en série du potentiel d'une couche sphéroïdale.*** — Le potentiel V sera alors égal à

$$\sum r^n\int A_n\varepsilon' d\sigma.$$

Les termes de V sont moindres que $r^n \int \varepsilon' d\sigma$.

L'erreur commise quand on prend pour V la somme des $n$ premiers termes, est moindre que $\frac{r^{n+1}}{1-r} \int \varepsilon' d\sigma$.

La série sera donc convergente si $r < 1$.

$\frac{1}{MM'}$ peut être développé suivant les puissances croissantes des variables $x$, $y$, $z$,

$$\frac{1}{MM'} = \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}$$
$$= \sum x^m y^p z^q \int A_{mpq}\, \varepsilon' d\sigma'$$

et, si on revient aux coordonnées polaires, on aura un développement suivant les puissances de $r^n$.

Si j'appelle $V_n$ l'ensemble des termes de degré $n$ dans V, j'aurai

$$V = V_0 + V_1 + \ldots + V_n + \ldots$$

Or V satisfait à l'équation de Laplace : on a donc

$$\Delta V_0 + \Delta V_1 + \ldots + \Delta V_n + \ldots = 0.$$

Cela exige que chacun des polynomes $V_n$ soit un polynome sphérique; et, si on remplace dans $V_n$, $x$, $y$, $z$, en fonction de $r$, $\mu$ et $\varphi$, on aura un résultat de la forme $r^n Y_n$ où $Y_n$ est une fonction sphérique. On a donc

$$V = \sum r^n Y_n.$$

Cette formule est valable si $r$ est plus petit que 1.

Supposons maintenant $r$ supérieur à 1, et considérons le point $M_1$ image du point M, tel que $OM_1 \times OM = 1$ (fig. 8);

j'ai $OM = r$, $OM_1 = \frac{1}{r}$. Si M' est un point de la sphère, on a les égalités

$$\frac{MM'}{M'M_1} = \frac{OM}{OM'} = \frac{OM'}{OM_1} = \frac{\sqrt{OM \times OM'}}{\sqrt{OM' \times OM_1}} = \sqrt{\frac{OM}{OM_1}} = r.$$

Or le potentiel en $M_1$ est

$$V_1 = \int \frac{\varepsilon' d\sigma}{M_1 M'} = r \int \frac{\varepsilon' d\sigma}{MM'}.$$

On a donc

$$V = \frac{V_1}{r}.$$

Or le potentiel en $M_1$, point situé à une distance $\frac{1}{r}$ du centre, est

$$\sum \frac{Y_n}{r^n}.$$

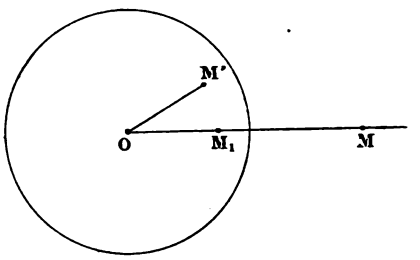

Fig. 8.

Le potentiel en M est donc

$$\sum \frac{Y_n}{r^{n+1}}.$$

Supposons maintenant que M et $M_1$ se rapprochent de la surface de la sphère en restant inverses l'un de l'autre. Les valeurs du potentiel M et $M_1$ sont voisines, mais les dérivées ont des valeurs différentes de part et d'autre de la surface et on a

$$\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial V_1}{\partial r_1} = 4\pi\varepsilon;$$

mais

$$V_1 = Vr,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r_1} = \left[ r \frac{\partial V}{\partial r} + V \right] \frac{dr}{dr_1}$$

$$= - Vr^2 - \frac{\partial V}{\partial r} r^3.$$

On a donc lorsque $r$ tend vers 1

$$\lim\left[\frac{\partial V}{\partial r}+r^3\frac{\partial V}{\partial r}+Vr^2\right]=4\pi\varepsilon.$$

Dans les mêmes conditions, puisque $\frac{\partial V}{\partial r}$ est fini, on a

$$\lim\frac{\partial V}{\partial r}(r-1)=0,$$

$$\lim\frac{\partial V}{\partial r}(r-r^3)=0;$$

enfin

$$\lim V(1-r^2)=0.$$

Si on ajoute ces quatre égalités, on voit que l'on a

$$\lim\left[2r\frac{\partial V}{\partial r}+V\right]=4\pi\varepsilon.$$

Posons

$$\Phi=2r\frac{\partial V}{\partial r}+V.$$

Si $r$ est inférieur à 1, $\Phi$ peut se représenter par une série de la forme

$$\Phi=\sum(2n+1)r^nY_n;$$

$\Phi$ est donc une fonction satisfaisant à l'équation de Laplace, puisque c'est une somme de polynomes sphériques.

Si $r$ tend vers 1, $\Phi$ tend vers $4\pi\varepsilon$. Si on démontre que ce développement est encore valable pour $r=1$, on arrive au théorème de Laplace :

*Théorème.* — Une fonction quelconque de deux variables est développable en une somme de fonctions sphériques.

***Potentiel en un point de la couche sphéroïdale.*** — Soit $\varepsilon$ la fonction donnée sur une sphère de rayon 1.

Elle définit à l'intérieur de la sphère un potentiel V, prenant sur la sphère la valeur $4\pi\varepsilon$.

Ce potentiel est développable en une série entière

$$(1) \qquad \sum A_n r^n$$

convergente si $r$ est inférieur à 1; et, si on regarde $r$ comme une variable complexe, cette série définit une fonction $\Phi$ convergente à l'intérieur du cercle de rayon 1, et qui sera obtenue en faisant dans V, $r = \rho e^{i\varphi}$.

Dans V, faisons $r = e^{i\varphi}$; on a une fonction $\Phi'$ définie sur le cercle de rayon 1, sauf peut-être en un certain nombre de points singuliers. Si la série (1) converge pour $\rho = 1$, elle représentera $\Phi'$ d'après le théorème d'Abel.

Je dis qu'il en est ainsi dans le cas où $\Phi'$ est développable en série de Fourier.

Nous avons alors

$$\Phi' = \sum A'_n e^{ni\varphi} + B'_n e^{-ni\varphi}.$$

Je dis que l'on a

$$A'_n = A_n, \quad B'_n = 0.$$

En effet, d'après le théorème de Cauchy, la suite des valeurs $\Phi'$ définit à l'intérieur du cercle de rayon 1 une fonction qui n'est autre que la fonction V $(\rho e^{i\varphi})$.

Cette fonction est développable suivant la série (1), et on a d'autre part

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{\Phi' d\varphi}{r^{n+1}}, \qquad \frac{1}{2i\pi}\int \Phi' r^{n-1} d\varphi = 0,$$

les deux intégrales étant prises le long du cercle de rayon 1.

Mais la première intégrale se réduit à $A'_n$, la seconde à $B'_n$. On a donc

$$A'_n = A_n,$$
$$B'_n = 0.$$

Donc, si $\Phi'$ est développable en série de Fourier, la série sera encore convergente pour $r = e^{i\varphi}$ et en particulier pour $r = 1$.

Tout revient donc à démontrer que $\Phi'$ est développable en série de Fourier, c'est-à-dire que $\Phi'$ est une fonction de $\varphi$ admettant une dérivée, sauf en quelques points singuliers, et qu'en ces points singuliers l'intégrale $\int |\Phi'|\, d\varphi$ a un sens.

Nous allons maintenant démontrer que $\varepsilon$ est développable en une somme de fonctions sphériques. Le potentiel en un point M de coordonnées $(r, \theta, \varphi)$ est

$$V = \int \frac{\varepsilon' d\sigma'}{MM'},$$

$\varepsilon'$ étant la densité de la couche sphérique, au point $(\theta', \varphi')$.

On a

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\int \frac{\varepsilon' d\sigma'}{MM'^2} \frac{dMM'}{dr}$$

$$= \int \frac{\varepsilon' (\cos\gamma - r)\, d\sigma'}{MM'^3}.$$

Comme cela a été démontré, nous avons

$$4\pi\varepsilon = \Phi(\theta, \varphi) = V + 2r\frac{\partial V}{\partial r} = \int \frac{\varepsilon'(1 - r^2)\, d\sigma'}{MM'^3}.$$

Supposons que OM soit une direction fixe que nous allons prendre comme axe $Oz$ :

$$\theta = 0, \qquad \mu = 1,$$

$$MM' = 1 - 2r\cos\gamma + r^2 = 1 - 2\mu' r + r^2.$$

L'élément de surface est $d\sigma' = d\mu' d\varphi'$, et on a pour valeur en M de la fonction $\Phi$

$$\Phi_M = (1 - r^2) \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu'}{(1 - 2r\mu' + r^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \varepsilon' d\varphi',$$

car $\varepsilon'$ seul dépend de $\varphi'$. Si on pose

$$F(\mu') = \int_0^{2\pi} \varepsilon' d\varphi',$$

on a

$$\Phi = (1 - r^2) \int_{-1}^{+1} \frac{F(\mu')\, d\mu'}{(1 - 2r\mu' + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Supposons que la sphère soit partagée en un nombre fini de polygones sphériques dont les côtés soient des arcs de courbes analytiques, et que dans chacun de ces polygones $\varepsilon'$ soit une fonction continue de $\mu'$ et de $\varphi'$.

Dans ces conditions, $F(\mu')$ sera une fonction analytique de $\mu'$, excepté pour les valeurs de $\mu'$ correspondantes aux sommets des polygones, ou aux parallèles de la sphère tangents aux côtés des polygones. La fonction $\frac{F(\mu')}{MM'^3}$ sera alors intégrable entre $-1$ et $+1$.

Si on pose $r = e^{i\psi}$, on aura

$$MM' = 2r\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) - \mu'\right] = 2r\left[\cos\psi - \mu'\right]$$

et si on pose ensuite

$$\cos\psi - \mu' = Z^2,$$

on aura

$$\Phi = \frac{1 - r^2}{(2r)^{\frac{3}{2}}} \int_{-1}^{+1} \frac{F(\mu')\, d\mu'}{Z^3}.$$

Nous démontrerons plus loin que $\Phi$ est une fonction de $\psi$ admettant une dérivée, et est par suite développable en une série de Fourier.

Enfin, si nous développons suivant les puissances de $r$, nous aurons une série convergente pour $|r| < 1$. Elle sera sûrement convergente même si $|r| = 1$, dans le cas où $\varepsilon$ ne comprend qu'un nombre fini de termes.

Voyons quelques exemples qui nous serviront par la suite.

Si on fait $\varepsilon' = \frac{1}{2\pi}$, on aura

$$F(\mu') = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} = 1,$$

si on fait $\varepsilon' = \frac{1}{\pi}$, on aura

$$F(\mu') = 2.$$

On pourra prendre pour fonctions sphériques correspondantes $Y_0 = \frac{1}{2\pi}$ ou $Y_0 = \frac{1}{\pi}$.

De même, si $\varepsilon' = \frac{\mu'}{2\pi}$, on a en appliquant la formule de la page 52

$$4\pi\varepsilon' = Y_0 + 3Y_1 + 5Y_2 + \ldots$$

Dans le cas qui nous occupe

$$Y_0 = Y_2 = \ldots = 0$$

$$Y_1 = \frac{2}{3}\mu$$

et

$$\Phi_1 = 2r = 2e^{i\psi}.$$

***Théorème de Laplace.*** — On a toujours le droit d'écrire

$$F(\mu') = a + b\mu' + F_1(\mu')$$

$a$ et $b$ étant des constantes quelconques ; $\Phi$ sera alors de la forme

$$2a + 2be^{i\psi} + \Phi_1$$

et si on pose

$$\eta(\psi) = \frac{1 - r^2}{(2r)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-i\sin\psi}{\sqrt{k}}\, e^{-i\frac{\psi}{2}};$$

on aura

$$\Phi_1 = \eta(\psi) \int_{-1}^{+1} \frac{F_1(\mu')\, d\mu'}{Z^3}.$$

Ceci posé, pour établir que $\Phi$ est développable en série de Fourier, il faut démontrer : 1° que $\frac{d\Phi}{d\psi}$ existe et est fini sauf en un nombre limité de points singuliers de la fonction $\Phi$ ; 2° que $\int |\Phi| d\psi$ est fini en ces points singuliers. Il y a une difficulté, car Z s'annule si $\mu' = \cos\psi$. Il faut donc que $F(\mu')$ s'annule pour $\mu' = \cos\psi$ et alors on doit étudier vers quelle limite tend la fonction lorsque $\mu$ tend vers $\cos\psi$.

1° $\frac{d\Phi}{d\psi}$ existe. En effet on a

$$\frac{d\Phi}{d\psi} = 2bie^{i\psi} + \frac{d\eta}{d\psi}\int_{-1}^{+1}\frac{F_1 d\mu'}{Z^3} + \frac{3}{2}\eta\sin\psi\int_{-1}^{+1}\frac{F_1 d\mu'}{Z^5}.$$

Or, je puis disposer de $a$ et $b$, de façon que l'on ait

$$F_1(\cos\psi) = 0,$$
$$F_1'(\cos\psi) = 0.$$

Si donc $\cos\psi - \mu'$ est un infiniment petit du premier ordre, $F(\mu')$, qui est analytique au voisinage de $\cos\psi$, sera un infiniment petit du second ordre, et, sous le signe d'intégration, les dénominateurs sont respectivement d'ordre $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{2}$ ; le numérateur est d'ordre 2. L'intégrale est donc finie, sauf si $\cos\psi$ est une valeur singulière de $F(\mu')$. Il faut qu'en ces points singuliers, où $\psi = \psi_0$, l'intégrale

$$\int |\Phi| d\psi$$

soit finie.

Supposons

$$a = F(\cos\psi_0)$$
$$b = 0.$$

On a alors

$$\int |\Phi| d\psi < 2 \int |F(\cos\psi)| d\psi + \int r_1 d\psi \int \frac{|F(\mu') - F(\cos\psi)|}{Z^3} d\mu.$$

Le second membre doit rester fini. La première intégrale est finie. Il faut démontrer qu'il en est de même de la seconde.

C'est une intégrale double qui, aux points singuliers, doit être un infiniment petit d'ordre inférieur à 2, et aux lignes singulières d'ordre inférieur à 1.

Or, nous avons ici une ligne singulière, la ligne $\mu' = \cos\psi$, mais pour $\mu' = \cos\psi_0$ le dénominateur est d'ordre $\frac{3}{2}$, le numérateur est d'ordre 1, sauf aux points singuliers de $F(\mu')$. Donc l'élément de l'intégrale devient infini de l'ordre $\frac{1}{2}$, l'intégrale a un sens.

Aux points singuliers $F(\mu') \neq F(\cos\psi)$, la fonction est d'ordre $\frac{3}{2}$, l'intégrale a encore un sens.

La fonction $\Phi$ remplit donc les conditions nécessaires pour être développable en série de Fourier.

La formule de Laplace est valable pour $r = 1$, et l'on a

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \sum (2n+1) Y_n.$$

Le théorème de Laplace est ainsi démontré.

# CHAPITRE IV

## MASSE FLUIDE HÉTÉROGÈNE. PROBLÈME DE CLAIRAUT

***Préliminaires.*** — Supposons le mouvement de rotation de la masse suffisamment lent : la surface diffèrera peu de celle d'une sphère, le carré de la vitesse de rotation $\omega^2$ sera considéré comme un infiniment petit du premier ordre.

On a déjà vu que si le mouvement de rotation est nul, les surfaces équipotentielles sont également des surfaces d'égale densité. Le potentiel $V_0$ en un point est uniquement fonction de $r$ et l'équation de Laplace se réduit à

$$(1) \qquad \Delta V_0 = \frac{d^2V_0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV_0}{dr} = -4\pi\rho.$$

La masse contenue entre deux sphères infiniment voisines de rayon $r$ et $r + dr$ est

$$4\pi r^2 \rho dr,$$

et la masse totale contenue à l'intérieur de la sphère de rayon $r$ est

$$\int_0^r 4\pi r^2 \rho dr.$$

Si on appelle D la densité moyenne de cette sphère

$$\int_0^r 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4}{3}\pi r^3 D.$$

D est une fonction de $r$ dont la dérivée D′ est négative dans l'hypothèse d'un équilibre stable.

En différentiant cette dernière équation, on a

$$4\pi r^2 \rho dr = 4\pi r^2 D\, dr + \frac{4}{3}\pi r^3 D' dr.$$

En supprimant le facteur $4\pi r^2 dr$, on a

$$(2) \qquad 3\rho = 3D + rD'.$$

En prenant encore une fois la dérivée, on obtient la relation

$$(3) \qquad 3\rho' = 4D' + rD''$$

qui nous sera utile par la suite.

Faisons encore la remarque suivante. On a évidemment :

$$3D \geqq 3D + rD' \geqq 0.$$

La première inégalité est vérifiée puisque D′ est négatif; la seconde l'est, car $\rho$ est positif. On a donc

$$0 \geqq \frac{rD'}{D} \geqq -3.$$

On a $\frac{rD'}{3D} = 0$ si la masse est homogène.

On a $\frac{rD'}{D} = -3$ si toute la masse est concentrée au centre.

Le potentiel de la sphère de rayon $r$ en un point de sa surface est

$$-\int \frac{4}{3}\pi r^2 D dr.$$

La force qui s'exerce sur une molécule de la surface est

$$(4) \qquad \frac{dV_0}{dr} = -\frac{4}{3}\pi r D.$$

Puisque $\rho$ et $V_0$ sont uniquement fonction de $r$, on peut les supposer fonctions l'un de l'autre, et, en vertu de la relation (1),

$\Delta V_0$ est fonction de $V_0$, et on peut écrire $\Delta V_0 = f(V_0)$ ; en différentiant

$$\frac{df(V_0)}{dV_0} = \frac{d(\Delta V_0)}{dV_0} = \frac{\frac{d\Delta V_0}{dr}}{\frac{dV_0}{dr}} = \frac{-4\pi\rho'}{-\frac{4}{3}\pi r D}$$

En tenant compte de la relation (3), on a

$$f'(V_0) = \frac{4D' + rD''}{rD}. \tag{5}$$

***Développement du potentiel en série.*** — Supposons maintenant un mouvement de rotation lent. La surface se déformera, mais peu. Le potentiel en un point d'une sphère sera développable en une somme de fonctions sphériques, et l'on aura

$$V = V_0 + \sum HY,$$

Y représentant une fonction sphérique et H étant un coefficient qui est une fonction de $r$ de l'ordre de $\omega^2$, puisque V diffère peu de $V_0$.

L'équation de Laplace peut s'écrire

$$\Delta V = \Delta V_0 + \sum \Delta(HY) = -4\pi\rho. \tag{6}$$

On a d'ailleurs, d'après une formule démontrée plus haut (p. 47) :

$$\Delta(HY) = Y\left[\frac{d^2H}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dH}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}H\right]$$

en supposant que $n$ soit l'ordre de la fonction sphérique Y.

Si on pose

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

la condition d'équilibre est, comme on l'a démontré plus haut, que les surfaces U = constante coïncident avec les surfaces d'égale densité.

On a donc

$$\Delta V = -4\pi\rho = \text{fonction de } U.$$

$\omega^2$ étant très petit, V diffère peu de $V_0$ ;

$$\Delta V \text{ diffère peu de } \Delta V_0.$$

La relation entre $\Delta V$ et V diffère peu de la relation entre $\Delta V_0$ et $V_0$, et on peut par suite écrire

$$\Delta V = f(U) + \varphi(U),$$

$\varphi$ étant une fonction dont la valeur est constamment de l'ordre de $\omega^2$.

Si l'on développe le second membre suivant la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned}\Delta V = f(V_0) + (U - V_0) f'(V_0) + \ldots \\ + \varphi(V_0) + (U - V_0)\varphi'(V_0) + \ldots\end{aligned}$$

En vertu des hypothèses faites, on peut négliger les termes infiniment petits du deuxième ordre et écrire

$$\begin{aligned}\Delta V &= f(V_0) + (U - V_0) f'(V_0) + \varphi(V_0) \\ &= \Delta V_0 + (U - V_0) f'(V_0) + \varphi(V_0).\end{aligned}$$

Enfin, en tenant compte de (6), on peut écrire

$$\sum \Delta(HY) = (U - V_0) f'(V_0) + \varphi(V_0).$$

On a d'ailleurs

$$U - V_0 = \sum HY + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ est lui-même décomposable en une somme de fonctions sphériques

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \sum CY.$$

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) &= \frac{\omega^2}{3}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\omega^2}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2) \\ &= \frac{\omega^2 r^2}{3} + \frac{\omega^2 r^2}{6}\,\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}.\end{aligned}$$

Le développement se réduit à la somme des deux fonctions sphériques $Y = 1$ et $Y = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}$ affectées respectivement des coefficients $C_1 = \frac{\omega^2 r^2}{3}$ et $C_2 = \frac{\omega^2 r^2}{6}$.

Les autres coefficients sont nuls.

On peut dans ces conditions écrire

$$U - V_0 = \sum (H + C) Y,$$

$$\sum \Delta (HY) = \sum (H + C) Y f'(V_0) + \varphi(V_0).$$

***Détermination des coefficients du développement.*** — Pour trouver les valeurs de H, on peut égaler terme à terme les coefcients d'une même fonction Y.

$$\Delta(HY)$$

contient Y en facteur ; on a donc

$$\begin{aligned} \Delta(HY) &= Y(H + C) f'(V_0) \\ &= Y(H + C) \frac{rD'' + 4D'}{rD}. \end{aligned}$$

Si on prend $Y = 1$, on a

$$\Delta H = \left(H + \frac{\omega^2}{3} r^2\right) \frac{rD'' + 4D'}{rD} + \varphi(V_0), \tag{8}$$

H est donc déterminé par une équation linéaire du second ordre.

Si on prend

$$Y = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2},$$

H est déterminé par l'équation :

$$\Delta(HY) = \left(H + \frac{\omega^2 r^2}{6}\right) Y \frac{rD'' + 4D'}{rD}. \tag{9}$$

Pour les autres, on a simplement l'équation

$$\Delta(\mathrm{HY}) = \mathrm{HY}\,\frac{r\mathrm{D}'' + 4\mathrm{D}'}{r\mathrm{D}}. \tag{10}$$

Ces dernières équations ont une intégrale évidente, $\mathrm{H} = 0$; nous allons démontrer que l'on ne doit pas en considérer d'autres.

Dans le cas où Y est une fonction du premier ordre, on peut trouver la valeur correspondante de H. En effet, il y a trois fonctions indépendantes du premier ordre :

$$\frac{x}{r},\quad \frac{y}{r},\quad \frac{z}{r}.$$

Considérons l'une d'elles, $\frac{x}{r}$ par exemple, on a vu que l'on avait

$$\Delta \mathrm{V}_0 = f(\mathrm{V}_0).$$

Si je prends les dérivées des deux membres par rapport à $x$, j'ai :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta \mathrm{V}_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(\mathrm{V}_0),$$

$$\Delta\left(\frac{\partial \mathrm{V}_0}{\partial x}\right) = f'(\mathrm{V}_0)\frac{\partial \mathrm{V}_0}{\partial x},$$

$$\Delta\left(\frac{d\mathrm{V}_0}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right) = f'(\mathrm{V}_0)\frac{d\mathrm{V}_0}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\Delta\left[\frac{d\mathrm{V}_0}{dr}\cdot\frac{x}{r}\right] = \frac{d\mathrm{V}_0}{dr}\cdot\frac{x}{r}\,\frac{r\mathrm{D}'' + 4\mathrm{D}'}{r\mathrm{D}}.$$

On voit que si Y est égal à $\frac{x}{r}$, l'équation

$$\Delta(\mathrm{HY}) = \mathrm{HY}\,\frac{r\mathrm{D}'' + 4\mathrm{D}'}{r\mathrm{D}}$$

est satisfaite pour $\mathrm{H} = a\,\frac{d\mathrm{V}_0}{dr}$. Il en est de même si $\mathrm{Y} = \frac{y}{r}$ ou $\mathrm{Y} = \frac{z}{r}$.

On a alors pour les termes du premier ordre

$$\frac{dV_0}{dr}\left(\frac{ax+by+cz}{r}\right),$$

$a$, $b$, $c$ étant des constantes quelconques. — Nous verrons prochainement qu'on peut les supposer nulles, à condition de prendre le centre de gravité de la masse comme origine des coordonnées.

***Les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes.*** — Considérons une surface de niveau primitivement sphérique, lorsque la rotation est nulle.

Pendant la rotation (fig. 9), le point M est venu en M′ sur la nouvelle surface de niveau. Le déplacement normal est

$$\zeta = MM' \cos(r, MM').$$

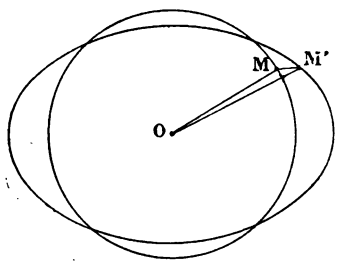

Fig. 9.

Avant la déformation, on avait en M

$$\Delta V_0 = -4\pi\rho.$$

Après la déformation, la densité en M′ est encore $\rho$. La densité en M est $\rho_1 = -\frac{\Delta V}{4\pi}$, en appelant V le potentiel en M, et on a la relation

$$\Delta V = \Delta V_0 - \zeta\,\frac{d\Delta V_0}{dr}.$$

On a de plus

$$\frac{d\Delta V_0}{dr} = \frac{d\Delta V_0}{dV_0}\cdot\frac{dV_0}{dr},$$

et, en se servant des relations (4) et (5),

$$\Delta V = \Delta V_0 + \frac{4\pi}{3}\,\zeta(4D' + rD'').$$

Nous avons d'ailleurs déjà écrit

$$\Delta V = \Delta V_0 + \sum \Delta HY.$$

On a donc

$$(11) \qquad \zeta = \frac{3}{4\pi(4D' + rD'')} \sum \Delta HY.$$

Revenons maintenant aux équations déterminant les coefficients H.

L'augmentation de volume entre la figure d'équilibre au repos, et la figure d'équilibre dans le mouvement de rotation, est nulle. On a donc

$$\int \zeta d\sigma = 0,$$

ou

$$\int \sum \Delta HY d\sigma = 0.$$

Ceci peut s'écrire

$$\sum \varphi(r) \int Y d\sigma = 0.$$

Chaque terme s'annule séparément, sauf toutefois le premier, pour lequel Y est égal à l'unité. On a donc, en désignant le coefcient de $Y_0 = 1$, par $H_0$,

$$\Delta(H_0) = 0,$$

mais $H_0$ est uniquement fonction de R si bien que

$$\Delta H_0 = \frac{d^2 H_0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dH_0}{dr} = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$H_0 = A + \frac{B}{r},$$

A et B étant deux constantes.

Mais remarquons que $V = V_0 + \Sigma \Pi Y$; à l'infini, V doit être nul comme $V_0$. Donc A est nul. De même B est nul; autrement le potentiel au centre serait infini, ce qui est absurde.

L'équation (8) qui définit $\Pi$ se réduit dans ce cas à

$$f'(V_0)\frac{\omega^2 r^2}{3} + \varphi(V_0) = 0.$$

Cette équation définit $\varphi(V_0)$.

Il nous reste encore à voir que pour les autres valeurs de Y, les seules valeurs possibles de $\Pi$ sont les valeurs $\Pi = 0$. Si nous admettons ce résultat, nous voyons que $\zeta$ se réduit à un seul terme, et que l'on a

$$\zeta = \frac{3}{4\pi}\frac{\Delta \Pi Y_2}{4D' + rD''} = Y_2 \psi(r).$$

On a donc

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}\psi(r).$$

Ceci montre que les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes.

En effet, on a

$$(x^2 + y^2 + z^2) = (r + \zeta)^2 = r^2 + 2r\zeta + \zeta^2;$$

mais nous pouvons négliger $\zeta^2$, et il reste

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + 2r\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}\psi(r).$$

C'est l'équation d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe $Oz$.

***Aplatissement.*** — L'aplatissement est le rapport de la différence entre le rayon équatorial et le rayon polaire, au rayon moyen, que nous pouvons supposer égal à $r$.

Pour avoir ces rayons nous pouvons calculer $\zeta$ pour les valeurs $(x = y = 0, z = r)$ et pour $(y = z = 0, x = r)$, on trouve les deux valeurs respectives

$$\zeta = -2r^2\psi(r)$$
$$\zeta = r^2\psi r.$$

La différence est

$$3r^2\psi(r);$$

et l'aplatissement est

$$e = \frac{3r^2\psi(r)}{r} = 3r\psi(r)$$
$$= \frac{3r\zeta}{x^2+y^2-2z^2} = \frac{3\zeta}{r\mathrm{Y}},$$

en désignant par Y la fonction sphérique

$$\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^2}.$$

On a vu que

$$\zeta = \frac{3}{4\pi}\,\frac{\Sigma\Delta\Pi\mathrm{Y}}{r\mathrm{D}''+4\mathrm{D}'};$$

La somme se réduit ici à un seul terme. L'équation (9) donne

$$\Delta(\Pi\mathrm{Y}) = \left(\Pi + \frac{\omega^2r^2}{6}\right)\mathrm{Y}f'(\mathrm{V}_0) = \left(\Pi + \frac{\omega^2r^2}{6}\right)\mathrm{Y}\,\frac{4\mathrm{D}'+r\mathrm{D}''}{r\mathrm{D}}.$$

Donc,

$$\frac{4\pi}{3}r^2\mathrm{D}e\mathrm{Y} = \left(\Pi + \frac{\omega^2r^2}{6}\right)\mathrm{Y},$$
$$\Delta er^2\mathrm{DY} = \frac{9}{4\pi}\left[\Delta\Pi\mathrm{Y} + \frac{\omega^2}{6}\Delta r^2\mathrm{Y}\right].$$

On a d'ailleurs aussi

$$\Delta r^2\mathrm{Y} = 0,$$

puisque Y est une fonction sphérique du second ordre.

On a aussi

$$\frac{9}{4\pi}\Delta\Pi\mathrm{Y} = (r\mathrm{D}''+4\mathrm{D}')\,er\mathrm{Y}.$$

L'équation devient donc

$$\Delta er^2\mathrm{DY} = (r\mathrm{D}''+4\mathrm{D}')\,er\mathrm{Y}.$$

On a démontré que si P est un polynome sphérique d'ordre $n$, on a

$$\Delta(\mathrm{UP}) = \mathrm{P}\left[\mathrm{U}'' + 2(n+1)\frac{\mathrm{U}'}{r}\right].$$

Si nous posons pour $n = 2$

$$\mathrm{U} = e\mathrm{D},$$
$$\mathrm{P} = r^2\mathrm{Y},$$

On aura l'équation

$$\frac{d^2(e\mathrm{D})}{dr^2} + \frac{6}{r}\frac{d.e\mathrm{D}}{dr} = e\mathrm{D}'' + \frac{4\mathrm{D}'e}{r};$$

en développant les calculs on trouve,

$$e''\mathrm{D} + 2e'\mathrm{D}' + \frac{2}{r}e\mathrm{D}' + \frac{6}{r}e'\mathrm{D} = 0.$$

C'est une équation linéaire du second ordre que l'on peut ramener à une équation du premier par le changement de variables.

$$\eta = \frac{re'}{e},$$
$$\eta' = \frac{re''}{e} - \frac{re'^2}{e^2} + \frac{e'}{e},$$
$$\frac{r^2e''}{e} = r\eta' + \eta^2 - \eta.$$

L'équation devient

$$(12) \qquad \mathrm{D}(r\eta' + \eta^2 + 5\eta) + 2r\mathrm{D}'(1 + \eta) = 0.$$

*C'est l'équation de Clairaut.*

***Limites de*** $\eta$. — Nous avons vu (p. 60) que l'on avait

$$-3 < \frac{r\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} < 0.$$

Dans l'équation (12), substituons ces valeurs extrêmes de $r\mathrm{D}'$,

et considérons les deux paraboles (fig. 10), où l'on a porté en abscisses $\eta_1$ et en ordonnées $r\eta_1'$

$$r\eta_1' + \eta_1^2 + 5\eta_1 = 0$$

et

$$r\eta_1' + \eta_1^2 + 5\eta_1 - 6(1 + \eta_1) = 0.$$

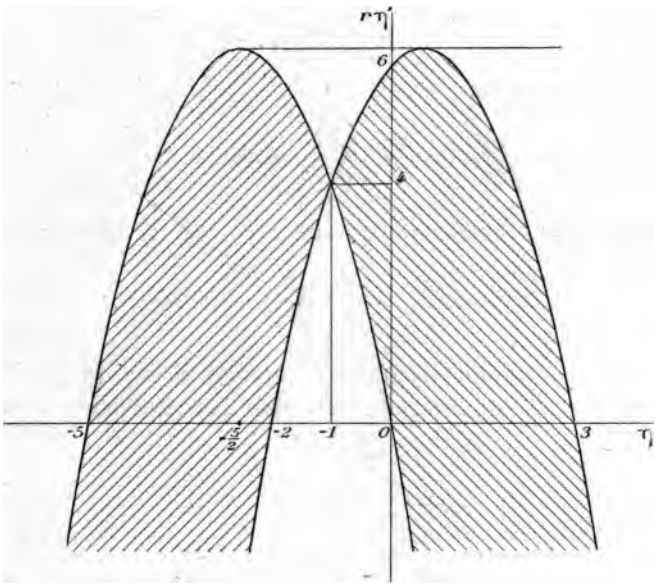


Fig. 10.

Le point dont les coordonnées sont $r\eta_1'$ et $\eta_1$ ne peut se trouver qu'entre les deux paraboles (dans la région hachurée sur la figure.)

Je vais maintenant démontrer que $\eta_1$ est compris entre 0 et 3.

$\eta_1$ ne peut être négatif. En effet, s'il est négatif pour une valeur $r_0$, on pourra trouver deux nombres positifs $\alpha$ et $\beta$ tels que l'on ait

$$-\beta < \eta < -\alpha,$$

$\alpha$ et $\beta$ pourront même satisfaire à l'inégalité

$$0 < \alpha < 2 < 5 < \beta.$$

Je dis que $\eta_1$ ne peut dépasser $-\alpha$.

En effet, si $\eta$ atteignait le valeur $-\alpha$ pour une valeur $r$ inférieure à $r_0$, $\frac{d\eta}{dr}$ serait négatif, $r\frac{d\eta}{dr}$ serait négatif.

Le point dont les coordonnées sont $r\eta'$ et $\eta = \alpha$ ne se trouverait pas alors dans la région hachurée.

De même $\eta$ ne peut dépasser $-\beta$. En effet, si pour une valeur de $r$ inférieure à $r_0$ on avait $r < r_0$, $\frac{d\eta}{dr}$ serait positif, $\frac{rd\eta}{dr}$ serait positif aussi et le point représentatif serait dans une région du plan où le point $(r\eta', \eta)$ ne peut se trouver.

Donc si pour une valeur de $r_0$, $\eta$ est négatif, il est, pour toute valeur de $r$ inférieur à $r_0$, compris entre deux nombres $-\alpha$ et $-\beta$, on a donc

$$\frac{re'}{e} < -\alpha;$$

$$\frac{e'}{e} < -\frac{\alpha}{r}.$$

En intégrant de $r_0$ à $r < r_0$, on a

$$\mathrm{L}\frac{e}{e_0} > \mathrm{L}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\alpha},$$

$$e > \mathrm{A}r^{-\alpha}.$$

Or $e$ croîtrait plus que $\frac{1}{r^\alpha}$ lorsque $r$ tend vers zéro, ce qui est impossible pour $r$ suffisamment petit, car $e$ serait très grand. Donc $\eta$ ne peut être négatif.

Je dis maintenant que $\eta$ est inférieur à 3. Le raisonnement est le même.

En effet, supposons que pour $r = r_0$ on ait $\eta = \eta_0 > 3$, je dis que pour $r$ inférieur à $r_0$, on aurait encore $\eta > 3$.

En effet, l'inégalité ne cesserait que si $\eta$ devenait inférieur à 3, ou si $\eta$ devenait négatif en passant par l'infini. Cette dernière hypothèse est à écarter d'après ce que l'on a vu plus haut. Il reste donc à montrer que $\eta$ ne peut devenir égal à 3. En effet, pour $\eta = 3$, $\eta'$ serait positif, $r\eta'$ serait positif, ce qui est absurde,

le point $(r\eta', \eta)$ ne serait pas compris entre les deux courbes. On a donc toujours

$$\eta < 3.$$

On a d'ailleurs

$$r\eta' + \eta^2 - \eta - 6 < 0 \qquad \text{pour } \eta > 3.$$

*A fortiori* on a

$$r\eta' + \eta^2 - \eta - 6 - 5(\eta - 3) < 0,$$
$$r\eta' + (\eta - 3)^2 < 0$$

et en multipliant par $dr$ qui est négatif si $r$ décroît de $r_0$ à zéro, on a

$$\frac{dr}{r} + \frac{d\eta}{(\eta - 3)^2} > 0,$$

c'est-à-dire

$$d\,\mathrm{L}\frac{1}{r} + d\frac{1}{\eta - 3} < 0,$$

$$\mathrm{L}\frac{1}{r} + \frac{1}{\eta - 3} < \mathrm{L}\frac{1}{r_0} + \frac{1}{\eta_0 - 3}.$$

Le second membre est une quantité finie ; le premier est une somme de deux termes, dont le premier seulement devient infini lorsque $r$ tend vers o, l'inégalité est donc impossible.

On a donc bien

$$0 < \eta < 3$$

C. Q. F. D.

Les limites peuvent-elles être atteintes?

Si on a $\frac{r\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} = 0$, l'équation se réduit à

$$r\eta' + \eta^2 + 5\eta = 0,$$

et admet la solution

$$\eta = 0.$$

Si $\frac{rD'}{D} = -3$, l'équation se réduit à

$$r\eta' + (\eta - 3)(\eta + 2) = 0$$

qui admet la solution $\eta = 3$.

Le premier cas correspond à un point intérieur de la masse supposée homogène ; le second correspond aux points extérieurs à la masse, et en particulier au cas où toute la masse est concentrée au centre.

Je dis que dans ces cas particuliers, les seules intégrales admissibles sont les solutions $\eta = 0$ et $\eta = 3$.

En effet :

Supposons $\frac{rD'}{D} = 0$. L'équation se réduit à

$$r\eta' + \eta^2 + 5\eta = 0,$$

$$\frac{dr}{r} + \frac{d\eta}{\eta^2 + 5\eta} = 0,$$

dont la solution est

$$\mathrm{L}\, r + \frac{1}{5}\,\mathrm{L}\,\frac{\eta}{\eta + 5} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$

Pour $r = 0$, on aurait

$$\mathrm{L}\,\frac{\eta}{\eta + 5} = \infty\,;$$

donc $\eta = -5$ ; or pour $r$ quelconque, $\eta$ est toujours positif : donc la constante d'intégration ne peut être que $-\infty$, et l'intégrale se réduit à $\eta = 0$. Il en est donc de même pour $\eta = 3$, dans le cas de la masse concentrée au centre. A l'extérieur de la masse, on a l'équation

$$r\eta' + \eta^2 - \eta - 6 = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$\mathrm{L}\, r^5 + \mathrm{L}\,\frac{\eta - 3}{\eta + 2} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$

La constante d'intégration ne peut être que 0 et on a $\eta = 3$.

Ce sont les seuls cas où $\eta$ puisse atteindre ses limites. En effet, supposons d'abord que pour une valeur $r_0$, on ait $\eta = 0$, pour $r$ différent de zéro, $\eta$ est supérieur à zéro, donc $\eta'(r_0) = 0$, et en portant ces valeurs dans l'équation de Clairaut, il vient

$$D' = 0,$$

mais comme

$$rD' + 3D = 3\rho,$$

on a $D = \rho$. La densité en ce point est donc égale à la densité moyenne, et comme par hypothèse la densité ne peut diminuer vers le centre, on a un noyau homogène.

Supposons de même que pour $r = r_0$ on ait $\eta = 3$, de même que précédemment il faudra que $\eta' = 0$; donc

$$\frac{rD'}{D} = -3.$$

$\rho = 0$ en ce point, et pour $r > r_0$ on a encore $\rho = 0$; $\rho$ ne peut augmenter puisqu'il y a équilibre, et par suite $\eta = 3$ pour $r > r_0$.

Il reste à voir ce qui se passe pour $r < r_0$. Je dis que l'on a encore $\eta = 3$. S'il en était autrement, $\eta$ serait plus petit que 3, $r^5(\eta - 3)$ serait une quantité qui diminuerait avec $r$, sa dérivée serait positive. On aurait donc

$$r\eta' + 5(\eta - 3) > 0.$$

Or, l'équation de Clairaut peut s'écrire

$$r\eta' + 5(\eta - 3) + (\eta - 3)^2 + \left[\frac{2rD'}{D} + 6\right]\left[1 + \eta\right] = 0.$$

Les deux derniers termes étant essentiellement positifs, il en résulte que l'on devra avoir

$$r\eta' + 5(\eta - 3) < 0$$

ce qui est contraire à ce que l'on a établi plus haut.

Pour $r < r_0$, on a donc encore $\eta = 3$, et par suite

$$\left[\frac{2rD'}{D} + 6\right] = 0.$$

Donc $\rho = 0$ pour $r < r_0$.

La masse de la planète est donc entièrement concentrée au centre.

***Forme des courbes intégrales.*** — Étudions maintenant la forme des courbes représentées par l'équation

$$r\eta' + \eta^2 + 5\eta + \frac{2rD'}{D}(1 + \eta) = 0.$$

Traçons les axes de coordonnées $O\eta$ et $Or$.

Il suffit évidemment d'étudier les courbes comprises dans les régions où l'on a

$$0 < \eta < 3.$$

Traçons la droite D d'équation $\eta = 3$.

Par un point du plan passe en général une courbe et une seule, à moins que $\eta'$ ne soit pas une fonction holomorphe.

Or, on a

$$\eta' = -\frac{\eta^2 + 5\eta + \frac{2rD'}{D}(1 + \eta)}{r}.$$

$\eta'$ n'est pas holomorphe si $r = 0$; la droite $r = 0$ est une courbe intégrale de l'équation; il y a sur cette droite deux points remarquables $\eta = 0$ et $\eta = -5$, pour lesquels $\eta'$ est indéterminé à condition que $\frac{rD'}{D}$ tende en effet vers zéro avec $r$. Or, on a

$$\frac{rD'}{D} = 3\left(\frac{\rho}{D} - 1\right).$$

Le second membre est essentiellement négatif, la densité d'une couche étant inférieure à la densité moyenne de la masse intérieure à cette couche, puisque par hypothèse il y a équilibre.

Lorsque $r$ tend vers zéro, $\rho$ tend vers une limite $\rho_0$ et l'on a

$$\rho < D < \rho_0,$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} - 1 < \frac{\rho}{D} - 1 < 0;$$

mais $\frac{\rho}{\rho_0} - 1$ tend vers zéro avec $r$, donc $\frac{\rho}{D} - 1$ tend aussi vers zéro et par suite $\frac{rD'}{D}$ tend vers zéro avec $r$.

Aux deux points

$$r = 0 \begin{cases} \eta_1 = 0 \\ \eta_1 = 3 \end{cases}$$

les deux courbes intégrales ne sont pas définies d'une façon unique.

Faisons maintenant $r$ suffisamment grand, alors

$$\frac{rD'}{D} = -3.$$

L'équation devient

$$r\eta_1' + \eta_1^2 - \eta_1 - 6 = 0.$$

Elle s'intègre immédiatement, et son intégrale générale est

$$\frac{r^3(\eta_1 - 3)}{\eta_1 + 2} = C^{te}.$$

Les courbes représentatives sont toutes asymptotes à la droite $\eta_1 = 3$, mais elles ne sont pas nécessairement asymptotes à la droite $r = 0$, car on a $\frac{rD'}{D} \neq -3$ pour $r = 0$ : le raisonnement ne s'applique plus.

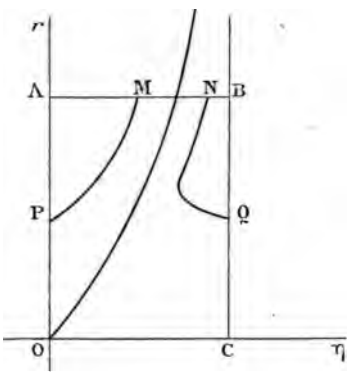

Fig. 11.

Considérons le rectangle OABC (fig. 11) formé par les droites $\eta_1 = 0$, $r = 0$, $\eta_1 = 3$, $r = r_0$, $r_0$ étant une valeur quelconque. Par un point P, pris sur le côté OA, passe une courbe intégrale et une seule. Pour cette valeur

$$\eta_1' = -\frac{D'}{D} > 0;$$

la portion de la courbe qui pénètre dans le rectangle est donc

dirigée vers le côté AB, quel que soit le point P. Une courbe intégrale ne peut donc sortir du rectangle par le côté OA, car si elle ressortait en un point P′, elle aurait une forme analogue à la courbe PMP′ (fig. 12), ce qui est impossible puisque $\frac{dr}{d\eta}$ ne peut être nul dans le rectangle.

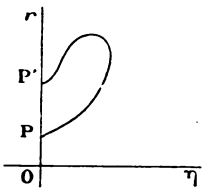

Fig. 12.

Donc cette courbe ne peut sortir du rectangle que par un point M de la droite AB. De même, si l'on considère la courbe intégrale passant par un point Q du segment CB, la tangente en ce point a comme coefficient angulaire

$$\frac{dr}{d\eta} = -\frac{r}{\frac{4}{\sqrt{\ }}\left[6+\frac{2rD'}{D}\right]}$$

quantité qui est négative puisque l'on a

$$\frac{2rD'}{D} > -6.$$

La branche de courbe qui pénètre dans le rectangle est donc dirigée vers l'arc AB, le même raisonnement que précédemment montre que cette courbe ne peut sortir du rectangle que par un point N de la droite AB. Evidemment, d'ailleurs, le point M est à gauche du point N puisque deux courbes intégrales ne peuvent pas se couper.

Les points M ont donc une limite M′ lorsque le point P se rapproche de C, de même les points N ont une limite N′ lorsque le point Q se rapproche de C.

Le lieu des points M′ sera une courbe complètement comprise entre les droites $\eta = 0$, $\eta = 3$. Il en est de même pour les lieux des points N′.

Est-il possible que M′ et N′ coïncident ? Supposons, ce qui sera démontré un peu plus loin que cela arrive. Alors il y aura une courbe intégrale et une seule qui passe par le point O. Cette courbe sera évidemment la courbe intégrale convenable, puisqu'elle restera constamment comprise entre les droites $\eta = 0$,

$\eta = 3$. Il en résulte que la fonction $\eta(r)$ est parfaitement déterminée, $\frac{re'}{e}$ est donc parfaitement déterminé ; $e$ est alors, en désignant par E la base des logarithmes népériens

$$e = e_0 \mathrm{E}^{\int_0^r \frac{\eta(r)}{r} dr}.$$

La constante $e_0$ sera connue si on se sert de l'une des équations précédentes, par exemple

$$er^2\mathrm{D} = \frac{9}{4\pi}\left(\mathrm{H} + \frac{\omega^2 r^2}{6}\right).$$

***Une seule courbe est acceptable.***— Démontrons maintenant qu'il y a une seule courbe intégrale acceptable. Nous allons, pour cela, démontrer qu'il y en a une et une seule qui passe par le point $r = 0$, $\eta = 0$, et que toutes les autres passent par le point $r = 0$, $\eta = -5$.

Démontrons d'abord qu'il y a au moins une courbe passant par le point $\eta = 0$, et une passant par $\eta = -5$.

Nous avons déjà vu quel était le signe de $r\eta'$ pour diverses valeurs de $\eta$ ; $r\eta'$ est négatif si $\eta$ est inférieur à $-5$, ou supérieur à $+3$ et positif si $\eta$ est compris entre 0 et $-2$.

Dans les autres intervalles, les deux signes sont possibles.

Pour $\eta = -5$, $r\eta'$ peut être nul ou négatif, mais non positif.

Pour $\eta = -2$, $r\eta'$ ne peut être que positif ou nul.

Enfin, nous avons vu que $\frac{r\mathrm{D}'}{\mathrm{D}}$ est une fonction tendant vers 0 avec $r$, de façon, qu'étant donné un nombre positif $\alpha$ voisin de zéro, on peut déterminer un nombre $r_1$ tel que l'inégalité

$$r < r_1$$

entraîne

$$0 > \frac{r\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} > -\alpha.$$

L'équation de Clairaut peut s'écrire

$$r\eta' + (\eta - \beta)(\eta + \gamma) = 0,$$

$\beta$ et $\gamma$ étant des nombres positifs, tendant l'un vers zéro, l'autre vers 5 lorsque $\alpha$ tend vers zéro.

Ceci va nous donner des indications sur le signe de $r\eta_1'$, lorsque $r$ est inférieur à $r_1$. On a le tableau suivant :

| $\eta_1$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-\gamma$ | | $0$ | | $\beta$. | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r\eta_1'$ | | $-$ | \| | ? | \| | $+$ | \| | ? | \| | $-$ | |

Il y a deux intervalles pour lequel le signe de $r\eta_1'$ est douteux, mais ces intervalles sont moindres que ceux précédemment déterminés.

Ceci posé, je vais démontrer que pour $r < r_1$, $\eta_1$ est nécessairement inférieur à $\beta$. Supposons que pour une valeur $r_2 < r_1$ on ait $\eta_1 = \eta_2 > \beta$. Je dis que si $r < r_2$ on aura encore $\eta > \beta$. En effet, l'inégalité ne pourrait cesser que si $\eta_1 = \beta$, mais alors dans l'intervalle, $\eta_1'$ sera positif, ce qui est contraire à la règle des signes.

Or l'équation peut s'écrire :

$$r\eta_1' + (\eta - \beta)(\eta_1 + \gamma) + 2\left(\frac{rD'}{D} + \alpha\right)(1 + \eta) = 0;$$

par hypothèse

$$\frac{rD'}{D} > -\alpha,$$

on a donc

$$r\eta_1' + (\eta_1 - \beta)(\eta_1 + \gamma) < 0.$$

*A fortiori* on a

$$r\eta_1' + (\eta - \beta)^2 < 0$$

$$\frac{\eta_1'}{(\eta_1 - \beta)^2} + \frac{1}{r} < 0;$$

et, si on intègre de $r_1$ à $r < r_1$,

$$-L\frac{1}{r} - \frac{1}{\eta_1 - \beta} > -L\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\eta_{11} - \beta}$$

$$L\frac{1}{r} + \frac{1}{\eta_1 - \beta} < L\frac{1}{r_1} + \frac{1}{\eta_{11} - \beta}.$$

Or $\eta_1 - \beta$ serait positif : on aurait *a fortiori*

$$L\frac{1}{r} < L\frac{1}{r_1} + \frac{1}{\eta_1 - \beta}.$$

Le second membre est fixe, le premier peut grandir au delà de toute limite, l'hypothèse faite est donc absurde. Par suite

$$\eta_1 < \beta.$$

$\eta_1$ a pour limite zéro lorsque $r$ tend vers zéro.

Je dis maintenant que l'équation de Clairaut admet au moins une intégrale tendant vers $-5$.

En effet, étant donnée une valeur $\eta_{11}$ comprise entre $-\gamma$ et $-5$

$$-5 < \eta_{11} < -\gamma,$$

considérons une courbe intégrale passant par le point $(r_1, \eta_{11})$, je dis que si $r_2 < r_1$, $\eta_{12} < \gamma$. Autrement $\eta_1'$ serait négatif pour $\eta_1 > -\gamma$, ce qui est contraire à la règle des signes.

On a donc pour $r$ suffisamment petit

$$-5 < \eta_1 < -\gamma;$$

mais $\gamma$ pourra être choisi aussi voisin de 5 que l'on voudra ; il en résulte que $\eta_1$ tend vers $-5$.

Soient $\eta_{10}$ et $\eta_{11}$ les deux intégrales dont nous venons de démontrer l'existence. Il leur correspond des intégrales $e_0$ et $e_1$ de l'équation linéaire du second ordre

$$e''D + 2e'D' + \frac{2}{r}eD' + \frac{6}{r}e'D = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation sera

$$e = Ae_0 + Be_1,$$

A et B étant deux constantes. L'intégrale générale de l'équation de Clairault sera

$$\eta = \frac{re'}{e} = \frac{Are_0' + Bre_1'}{Ae_0 + Be_1}$$

$$= \frac{A\eta_{10}\dfrac{e_0}{e_1} + B\eta_{11}}{A\dfrac{e_0}{e_1} + B}.$$

Or, quand $r$ tend vers zéro, $\eta_1$ tend vers $-5$, $\eta_0$ tend vers zéro. Il en résulte que $\eta_1 - \eta_0$ pourra être inférieur à $-4$. On aura donc

$$\frac{re_1'}{e_1} - \frac{re_0'}{e_0} < -4,$$

$$\frac{e_1'}{e_1} - \frac{e_0'}{e_0} < -\frac{4}{r},$$

$$e_1 < e_0 r^{-4};$$

c'est-à-dire que la limite de $\frac{e_0}{e_1}$ est zéro quand $r$ tend vers zéro. Donc quand $r$ tend vers zéro, la limite de $\eta$ est la même que celle de $\eta_1$ tant que B est différent de zéro. Si $B = 0$ la limite est $\eta_0$. Il en résulte qu'il y a une intégrale et une seule de l'équation de Clairaut tendant vers zéro avec $r$ : c'est celle qui correspond à $B = 0$.

***Relation entre l'aplatissement, la pesanteur et la force centrifuge à l'équateur.*** — A l'extérieur de la planète, comme cela a déjà été remarqué, on ne peut parler de surfaces d'égale densité, mais on peut encore parler de surfaces de niveau.

Pour ces surfaces, on a toujours l'équation

$$\Delta V = \Delta V_0 + \Delta(HY) = 0;$$

mais $\Delta V_0 = -4\pi\rho$ est nul à l'extérieur de la masse fluide. On a donc

$$\Delta(HY) = 0$$

$$\Delta(HY) = Y\left[H'' + \frac{2}{r}H' - \frac{n(n+1)}{r^2}H\right] = 0.$$

Faisons $n = 2$, on a

$$H'' + \frac{2}{r}H' - \frac{6}{r^2}H = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$H = Ar^2 + Br^{-3};$$

mais à l'infini H doit être nul, il faut donc que A = o. On a donc

$$H = Br^{-3};$$

si M représente la masse fluide, V le volume enfermé par la surface de niveau considérée, on a

$$D = \frac{M}{V} = \frac{C}{r^3},$$

en posant $C = \frac{3M}{4\pi}$.

L'équation

$$er^2DY = \frac{9}{4\pi}\left[H + \frac{\omega^2 r^2}{6}\right]Y$$

devient

$$\frac{eC}{r} = \frac{9}{4\pi}\left[\frac{B}{r^3} + \frac{\omega^2 r^2}{6}\right],$$

$$e = \frac{9}{4\pi}\left[\frac{B}{Cr^2} + \frac{\omega^2 r^3}{6C}\right].$$

D'où

$$re' = \frac{9}{4\pi}\left[\frac{-2B}{Cr^2} + \frac{3.\omega^2 r^3}{6C}\right].$$

On a donc

$$\begin{aligned} re' + 2e &= \frac{9}{4\pi} \cdot \frac{5\omega^2 r^3}{6C} \\ &= \frac{15}{8\pi C}\omega^2 r^3 \\ &= \frac{15\omega^2}{8\pi D}. \end{aligned}$$

Comme on a posé

$$re' = e\eta$$

on a finalement

$$e(\eta + 2) = \frac{15}{8\pi} \cdot \frac{\omega^2}{D}.$$

Cette relation établie pour l'extérieur de la masse, est encore valable à la surface. On peut lui donner une autre forme.

La force centrifuge à l'équateur est égale à $\omega^2 r$ ; la pesanteur à la surface est $\frac{4}{3}\pi r D$. Si on désigne par $\varphi$, le rapport de la première à la seconde de ces quantités, on a

$$e(\eta + 2) = \frac{5}{2}\varphi.$$

Or $\eta$ est compris entre o et 3; il en résulte la double inégalité

$$\frac{5\varphi}{4} > e > \frac{\varphi}{2};$$

$\eta = 3$ seulement si la planète est homogène. L'aplatissement ne peut atteindre la limite $\frac{\varphi}{2}$ que si la planète est homogène.

***Détermination complète des coefficients.*** — Nous allons maintenant démontrer que les équations

$$\Delta HY = \frac{rD' + 4D''}{rD} HY$$

qui déterminent les coefficients H du développement

$$V = V_0 + \sum HY,$$

n'admettent que la solution $H = o$.

En effet, soit $n$ l'ordre de la fonction sphérique, posons

$$H = Zr^n D.$$

L'équation devient

$$\Delta(Zr^n DY) = \frac{rD'' + 4D'}{r} Zr^n Y;$$

$r^n Y$ est un polynôme sphérique; en appliquant la formule

$$\Delta(PU) = \left[U'' + \frac{2n+2}{r} U'\right] P,$$

on obtient finalement

$$(ZD)'' + \frac{2n+2}{r}(ZD)' = ZD'' + \frac{4ZD'}{r},$$

ce qui, développé, s'écrit :

$$Z''D + 2Z'\left(D' + \frac{n+1}{r}D\right) + \frac{2n-2}{r}ZD' = 0.$$

Si l'on fait le même changement de variables

$$\frac{rZ'}{Z} = \varepsilon,$$

on a

$$r\varepsilon' + \varepsilon^2 + (2n+1)\varepsilon + \frac{2rD'}{D}(\varepsilon + n - 1) = 0.$$

Cette équation se discute de la même manière que l'équation de Clairaut ; $\frac{2rD'}{D}$ est compris entre les limites 0 et $-6$.

On est donc amené à considérer les deux équations :

$$r\varepsilon' + \varepsilon^2 + (2n+1)\varepsilon = 0,$$
$$r\varepsilon' + \varepsilon^2 + (2n-5)\varepsilon - 6(n-1) = 0.$$

On construit les courbes en portant $\varepsilon$ en abscisses et $r\varepsilon'$ en ordonnées (fig. 13) ; on obtient deux paraboles, et comme précédemment on démontre que $\varepsilon$ ne peut être compris qu'entre 0 et 3.

A l'extérieur de la planète on a $\Delta(HY) = 0$, ce qui peut s'écrire

$$H'' + \frac{2}{r}H' - \frac{n(n+1)}{r^2}H = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$H = ar^n + br^{-(n+1)};$$

H devant s'annuler à l'infini, on a $a = 0$, et par suite

$$H = br^{-n-1},$$
$$Z = \frac{b}{C}r^{-2(n+1)},$$

d'où

$$\varepsilon = -2(n \neq 1).$$

Mais $\varepsilon$ doit être compris entre o et 3 ; donc $b$ doit être nul.

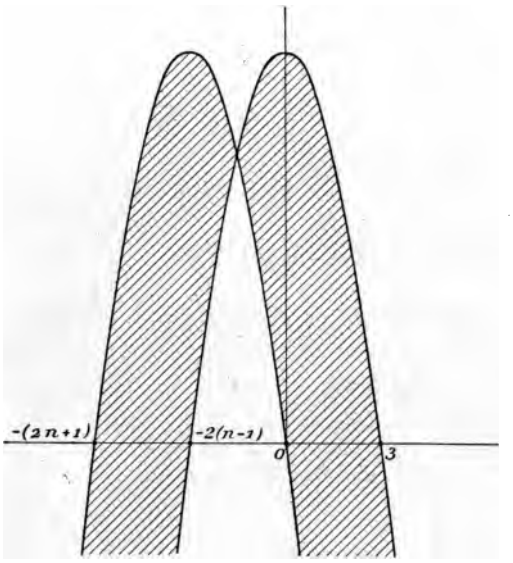


Fig. 13.

$H = 0$ est donc la seule solution possible, à l'extérieur de la masse. Il en est donc de même à l'intérieur.

Ce résultat ne subsiste pas si $n = 1$ ou $\frac{1}{2}$, mais nous avons déjà examiné ces cas.

***Détermination précise de l'aplatissement.*** — Nous avons trouvé

$$\Delta V = \Delta V_0 + 4\pi\rho'\zeta,$$
$$\Delta(HY) = 4\pi\rho'\zeta,$$
$$e = \frac{3\zeta}{rY}.$$

Nous avons donc l'équation

$$\Delta(HY) = \frac{4}{3}\pi e\rho' rY,$$

et, en se rappelant la formule

$$\Delta(HY) = Y\left[H'' + \frac{2H'}{r} - \frac{n(n+1)}{r^2} H\right],$$

dans laquelle $n = 2$, on arrive pour déterminer H à l'équation linéaire avec second membre :

$$H'' + \frac{2H'}{r} - \frac{6H}{r^2} = \frac{4}{3}\pi e\rho' r.$$

L'intégrale générale de l'équation sans second membre étant

$$H = \alpha r^2 + \beta r^{-3},$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes d'intégration, on déterminera l'intégrale de l'équation avec second membre, en regardant $\alpha$ et $\beta$ comme des fonctions de $r$. La méthode de variation des constantes donne

$$(1) \qquad \alpha' r^2 + \beta' r^{-3} = 0,$$

par suite

$$H' = 2\alpha r - 3\beta r^{-4}$$
$$H'' = 2\alpha' r - 3\beta' r^{-4} + 2\alpha + 12\beta r^{-5}$$

et, portant ces valeurs dans l'équation primitive, on a

$$(2) \qquad 2\alpha' r - 3\beta' r^{-4} = \frac{4}{3}\pi e\rho' r.$$

Les équations (1) et (2) déterminent $\alpha'$ et $\beta'$

$$\alpha' = \frac{4\pi}{15} e\rho',$$

$$\beta' = -\frac{4\pi}{15} e\rho' r^5.$$

On a donc

$$H = \frac{4\pi r^2}{15}\int_a^r e\rho' dr - \frac{4\pi r^{-3}}{15}\int_b^r e\rho' r^5 dr.$$

Cette fonction comprend deux constantes arbitraires $a$ et $b$. Comment faut-il les choisir ? Soit $r_1$ le rayon de la planète ; pour $r$ supérieur à $r_1$, $\rho = 0$, $\rho' = 0$, par suite les intégrales se réduisent à des constantes

$$\int_a^{r_1} \quad \text{et} \quad \int_b^{r_1}.$$

Pour $r = \infty$, H doit s'annuler. Donc le coefficient de $r$ est nul ; on a donc $a = r_1$.

De même pour $r = 0$, H doit être fini ; donc le coefficient de $r^{-3}$ doit être nul, si $r = 0$, on a donc $b = 0$.

H est ainsi complètement déterminé.

Portons cette valeur de H dans l'équation

$$er^2 D = \frac{9}{4\pi}\left[H + \frac{\omega^2 r^2}{6}\right].$$

Il vient

$$e = \frac{3}{5D}\int_{r_1}^{r} e\rho' dr - \frac{3}{5r^5 D}\int_0^r e\rho' r^5 dr + \frac{3}{8\pi}\frac{\omega^2}{D}.$$

Que devient cette expression à la surface pour $r = r_1$ ? D devient $D_1$ la densité moyenne de la planète, et on a

$$e_1 = -\frac{3}{5D_1 r_1^5}\int_0^{r_1} e\rho' r^5 dr + \frac{3}{8\pi}\frac{\omega^2}{D_1}$$

$$(3) \qquad e_1 = -\frac{3}{5r_1^5 D_1}\int_0^{r_1} e\rho' r^5 dr + \frac{\varphi}{2},$$

$\varphi$ étant comme on l'a déjà indiqué le rapport de la force centrifuge à l'équateur, à la pesanteur.

***Moments d'inertie de l'ellipsoïde.*** — Calculons l'intégrale $\int Y^2 d\sigma$, Y étant la fonction

$$\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^2}.$$

On a

$$\begin{aligned} x &= r\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi, \\ y &= r\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi, \\ z &= r\mu, \\ d\sigma &= d\mu d\varphi. \end{aligned}$$

On a donc à calculer

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\left[1-3\mu^2\right]^2 d\mu d\varphi = 2\pi\int_{-1}^{+1}\left[1-6\mu^2+9\mu^4\right]d\mu$$

ce qui donne

$$\int Y^2 d\sigma = \frac{16\pi}{5}. \tag{4}$$

Calculons les moments d'inertie A, B, C de la masse

$$A = \int \rho(y^2+z^2)d\tau.$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta V &= -4\pi\rho, \\ -4\pi A &= \int \Delta V(y^2+z^2)d\tau, \\ -4\pi B &= \int \Delta V(z^2+x^2)d\tau, \\ -4\pi C &= \int \Delta V(x^2+y^2)d\tau \\ -2\pi(A+B+C) &= \int \Delta V(x^2+y^2+z^2)d\tau. \end{aligned}$$

Or on a

$$\Delta V = \Delta V_0 + \Delta(HY)$$

et de plus

$$\int \Delta(\mathrm{HY}) r^2 d\tau = 0 ;$$

en effet, on a $d\tau = r^2 dr d\mu d\varphi = dr d\sigma$.

Il vient

$$\int \Delta \mathrm{HY} r^2 d\tau = \int \Delta(\mathrm{HY}) r^2 dr d\sigma$$

$$= \int \frac{\Delta(\mathrm{HY})}{\mathrm{Y}} r^2 dr . \mathrm{Y} d\sigma = \int f(r) dr \int \mathrm{Y} d\sigma,$$

ce qui est nul, car le second facteur est nul. On a donc.

$$2\pi(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}) = \int \Delta \mathrm{V}_0 r^2 d\tau$$

$$= \int \Delta \mathrm{V}_0 r^2 dr d\sigma,$$

et comme $\Delta \mathrm{V}_0$ ne dépend que de $r$, on a

$$2\pi(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}) = 4\pi \int \Delta \mathrm{V}_0 r^4 dr.$$

Or

$$r^2 \Delta \mathrm{V}_0 = r^2 \frac{d^2 \mathrm{V}_0}{dr^2} + 2r \frac{d\mathrm{V}_0}{dr} = \frac{d}{dr}\left[ r^2 \frac{d\mathrm{V}_0}{dr} \right];$$

mais on a

$$\frac{d\mathrm{V}_0}{dr} = -\frac{4\pi r \mathrm{D}}{3},$$

donc

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = \frac{8\pi}{3} \int_0^{r_1} r^2 \frac{d}{dr} (\mathrm{D} r^3) dr.$$

Si on intègre par parties et que l'on remarque que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, on voit que l'on a

$$2\mathrm{A} + \mathrm{C} = \frac{8\pi}{3} \left[ [r^5 \mathrm{D}]_0^{r_1} - \int_0^{r_1} 2r^4 \mathrm{D} dr \right].$$

En négligeant des infiniment petits on a $A = C$ ; et par suite

$$C = \frac{8\pi}{9}\left[r_1^5 D_1 - 2\int_0^{r_1} r^4 D dr\right].$$

Calculons maintenant $C - A$ : on a

$$4\pi(C - A) = \int \Delta V(z^2 - x^2) d\tau,$$

$$4\pi(C - B) = \int \Delta V(z^2 - y^2) d\tau.$$

Donc

$$8\pi(C - A) = -\int \Delta V r^2 Y d\tau$$

en désignant par Y la fonction sphérique $\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}$

On a, comme on a vu précédemment :

$$8\pi(C - A) = -\int \Delta V_0 r^2 Y d\tau - \int \Delta(HY) r^2 Y d\tau.$$

La première intégrale est nulle, car c'est le produit de deux intégrales :

$$\int \Delta V_0 r^4 dr \int Y d\sigma.$$

dont la seconde est nulle. L'intégrale

$$\int \Delta(HY) r^2 Y d\sigma = \int \frac{\Delta(HY)}{Y} \cdot r^2 Y^2 d\tau$$

$$= \int \frac{\Delta(HY)}{Y} r^4 dr \int Y^2 d\sigma ;$$

et comme on a

$$(4) \qquad \int Y^2 d\sigma = \frac{16\pi}{5},$$

il vient

$$8\pi(C-A) = -\frac{16\pi}{5}\int \frac{\Delta(HY)}{Y} r^4 dr$$

$$= -\frac{16\pi}{5}\int \frac{4}{3}\pi e\rho' r^5 dr$$

$$= -\frac{64\pi^2}{15}\int_0^{r_1} e\rho' r^5 dr.$$

Donc on a

$$C-A = -\frac{8\pi}{15}\int_0^{r_1} e\rho' r^5 dr$$

quantité positive.

On a donc en se reportant à la formule (3) page 87

$$e_1 - \frac{\varphi}{2} = \frac{9}{8\pi}\frac{(C-A)}{r_1^5 D_1}.$$

On aurait pu faire une hypothèse différente de celle de Clairaut, par exemple, supposer un noyau solide non homogène, recouvert d'une masse fluide; la relation établie plus haut subsisterait encore.

***Comparaison de la théorie et des observations.*** — Posons $\frac{C-A}{C} = J$, on a

$$e_1 - \frac{\varphi}{2} = \frac{J}{r_1^5 D_1}\left[r_1^5 D_1 - 2\int_0^{r_1} r^4 D dr\right]$$

$$= J\left[1 - \frac{2\int_0^{r_1} r^4 D dr}{r_1^5 D_1}\right].$$

$e_1$ est mesuré par la géodésie, on trouve $\frac{1}{293,5}$ ; $\varphi$ est mesuré par la physique, on trouve $\frac{1}{288,38}$ ; J est mesuré par la précession des équinoxes, on trouve $0,0032753 = \frac{1}{305,31}$ on a donc l'égalité

$$\frac{2\int r^4 D dr}{r_1^5 D_1} = 1 - \frac{e_1 - \frac{1}{2}\varphi}{J} = 0,49145.$$

Revenons maintenant à l'équation de Clairaut

$$r\eta' D + (\eta^2 + 5\eta)D + 2rD'(1+\eta) = 0 ;$$

on a

$$\frac{d}{dr}\left[r^5\sqrt{1+\eta}\,D\right] = \frac{r^5\eta' D}{2\sqrt{1+\eta}} + \frac{\varphi r^5 D'(1+\eta)}{\varphi\sqrt{1+\eta}} + \frac{5r^4 D(1+\eta)}{\sqrt{1+\eta}}$$
$$= \frac{5r^4 D}{\sqrt{1+\eta}}\left[1+\eta+\frac{r\eta'}{10}+\frac{r(1+\eta)}{5}\frac{D'}{D}\right].$$

On peut donc écrire l'équation de Clairaut

$$\frac{d}{dr}\left[r^5\sqrt{1+\eta}\,D\right] = \frac{5r^4 D}{\sqrt{1+\eta}}\left[1+\eta-\frac{\eta^2}{10}-\frac{\eta}{2}\right]$$
$$= \frac{5r^4 D}{\sqrt{1+\eta}}\left[1+\frac{\eta}{2}-\frac{\eta^2}{10}\right].$$

J'intègre de o à $r_1$ et j'ai

$$r_1^5\sqrt{1+\eta_1}\,D_1 = \int_0^{r_1}\frac{5r^4 D}{\sqrt{1+\eta}}\left[1+\frac{\eta}{2}-\frac{\eta^2}{10}\right]dr.$$

On peut appliquer le théorème de la moyenne, puisque $5r^4 D$ est une fonction positive ; $\xi$ désignant une valeur comprise entre o et 3, et correspondant à une valeur de $r$ comprise entre o et $r_1$, j'ai

$$r_1^5\sqrt{1+\eta_1}\,D_1 = \frac{1+\frac{\xi}{2}-\frac{\xi^2}{10}}{\sqrt{1+\xi}}\int 5r^4 D dr.$$

Voyons les variations de

$$\frac{1+\frac{\xi}{2}-\frac{\xi^2}{10}}{\sqrt{1+\xi}}=K;$$

lorsque $\xi$ varie de 0 à 3 on trouve :

$$\begin{array}{ll}
\xi=0 & K=1 \\
\xi=\frac{1}{3} & K=1,00075 \text{ maximum} \\
\xi=\frac{1}{2} & K=1,0002 \\
\xi=0,53 & K=1 \\
\xi=\eta_1=0,544 & K_1=0,99954 \\
\xi=1 & K=0,989 \\
\xi=2 & K=0,9 \\
\xi=3 & K=0,8.
\end{array}$$

On voit que K varie très peu et reste compris entre 1,00075, et 0, 99954. K est donc très voisin de 1 ; et si dans la formule on remplace $\eta_1$ par sa valeur 0,544, on trouve

$$\frac{2\int r^4 D dr}{r_1^5 D_1}=\frac{2}{5K}\sqrt{1+\eta_1}$$
$$=0,497\,\frac{1}{K}>0,49663.$$

Précédemment on a trouvé pour la même valeur

$$0,49145.$$

Comment peut-on expliquer cette différence?

On peut admettre qu'il y a des erreurs sur les quantités qui entrent dans le calcul : c'est-à-dire des erreurs sur J et $e_1$.

La première équation donnerait alors comme valeur exacte :

$$\frac{2\int r^4 D dr}{r_1^5 D_1}=0,49145-\frac{1}{J}\,\delta e_1+\frac{e_1-\frac{1}{2}}{J^2}\,\delta J$$
$$=0,49145-305,31\,\delta e_1+155,26\,\delta J.$$

La seconde équation donnerait :

$$\frac{d.\mathrm{K}\int r^4 \mathrm{D}dr}{r_1^5 \mathrm{D}_1} = \frac{-(\eta_1+2)de}{5e\sqrt{1+\eta_1}}$$

$$\frac{2\mathrm{K}\int r^4 \mathrm{D}dr}{r_1^5 \mathrm{D}_1} = 0{,}49700 - 120{,}18\,\delta e_1.$$

Supposons $\delta \mathrm{J} = 0$ ; pour que ces formules soient comparables, il faudrait que $\delta e_1$ soit égal à $-0{,}000027$ et la valeur de $e_1$ serait alors $\frac{1}{295{,}85}$.

Si on suppose que l'erreur est commise sur J, on a

$$\delta \mathrm{J} = 0{,}000034.$$

J'aurai alors pour valeur $\frac{1}{302{,}18}$.

Cela est-il admissible ? Remarquons d'abord que le J qui figure dans cette formule n'est qu'approximativement $\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$.

Cela revient à remplacer J par

$$\frac{\mathrm{J}}{1-\frac{2}{3}\mathrm{J}}$$

L'erreur commise est $\delta \mathrm{J} = \frac{2}{3}\mathrm{J}^2$ : on trouve

$$\delta \mathrm{J} = 0{,}000006.$$

Ce n'est pas de là que provient l'erreur.

D'autre part les mesures de nutation sont assez précises. Si on désigne par N la constante de la nutation, on a

$$\mathrm{N} = \frac{\mu}{1+\mu}\mathrm{J}\,[5{,}36542];$$

en désignant par $\mu$ le rapport $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}$ de la masse lunaire, à la masse

terrestre ; le nombre entre parenthèse étant non le coefficient mais le logarithme de ce nombre.

Soit $p$ la précession des équinoxes : c'est la somme de deux termes

$$p = p' + p'',$$

celui dû à l'attraction de la lune

$$p' = 866135 \frac{\mu}{1+\mu} J = 34,38 ;$$

celui dû à l'attraction du soleil

$$p'' = 4871,05 J = 15,95.$$

Posons

$$\frac{\mu}{1+\mu} = \varepsilon :$$

on aura

$$\frac{\delta N}{N} = \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\delta J}{J},$$

$$\delta p = p' \left[ \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\delta J}{J} \right] + p'' \frac{\delta J}{J}$$

$$= p' \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} + p \frac{\delta J}{J},$$

$p$ est mieux connu que N, on peut donc supposer $\delta p = 0$ ; et résolvant les deux équations où l'on regarde $\frac{\delta J}{J}$ comme égal $0,000034 \times 305,31 = 0,0103$, on trouve :

$$\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} = -0,015$$

$$\frac{\delta N}{N} = 0,005.$$

Cela revient à prendre pour N la valeur $9''17$ au lieu de $9''21$ et pour $\mu$ la valeur $\frac{1}{81,5}$ au lieu de $\frac{1}{82}$. Ces chiffres paraissent difficiles à admettre.

On peut alors supposer que l'erreur provient de la somme des erreurs commises sur chacun des termes.

Une autre explication serait que l'hypothèse de Clairaut n'est approchée qu'aux termes du second ordre près. M. Callandreau, qui a fait le calcul, a montré que considérer les termes du second ordre reviendrait à creuser l'ellipsoïde de 9 mètres seulement. C'est négligeable.

On pourrait alors se demander jusqu'à quel point l'hypothèse de Clairaut serait exacte : par exemple, on peut supposer la terre complètement solide sauf la mer. Au moment de la solidification, les couches obéissaient à la loi de Clairaut, mais depuis ce moment, la vitesse de rotation aura pu varier (par exemple, les marées diminuent cette vitesse de rotation); et de plus l'aplatissement des ellipsoïdes internes aura pu se modifier par suite des tassements qui ont produit les continents et les montagnes.

Enfin on pourrait supposer qu'une portion intérieure de la terre est restée fluide : les deux parties fluide et solide, agiraient alors séparément dans le phénomène de la précession : mais l'hypothèse de la fluidité intérieure de la terre n'est guère vraisemblable.

Jusqu'à présent nous avons considéré les planètes comme fluides et nous avons montré quelle devait être la distribution des densités à l'intérieur.

Supposons maintenant que l'on ait une masse solide, de forme quelconque, où la distribution des densités est quelconque, mais entièrement recouverte d'une masse fluide de faible épaisseur, soumise à la pesanteur et à la force centrifuge due à la rotation.

La surface extérieure sera une surface de niveau, sur laquelle on aura

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = C^{te}$$

mais à l'intérieur les surfaçes équipotentielles ne sont pas nécessairement les surfaces d'égale densité.

# CHAPITRE V

## MASSE SOLIDE RECOUVERTE D'UNE MASSE FLUIDE

***Théorème de Stokes.*** — *Supposons que l'on ait déterminé la forme de la surface extérieure S, la masse M et la rotation* $\omega$, *on pourra déterminer en tout point extérieur la valeur du potentiel V.*

Il y a une infinité de lois de distribution de la matière dans le noyau, qui peuvent donner une même surface extérieure, mais quelle que soit cette distribution, le potentiel V, à l'extérieur, est complètement déterminé par les éléments S, M et $\omega$.

En effet la fonction V satisfait à l'extérieur de la masse à l'équation $\Delta V = 0$. A l'infini $V = 0$; sur la surface on a

$$V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = U = K,$$

et enfin l'égalité

$$\int \frac{dV}{dn}\, d\sigma = -4\pi M.$$

Le problème de la détermination de V est complètement déterminé. En effet, soit V′ une autre solution. Sur la surface, on a

$$V - V' = U - U' = K - K' = \text{constante}.$$

On a d'ailleurs $\Delta(V - V') = 0$.

Donc $V - V'$ est le potentiel d'une charge électrique répartie sur la surface, puisque c'est une fonction constante sur cette surface.

La charge a pour expression

$$\int \frac{\partial(V - V')}{\partial n} d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue à la surface extérieure ; mais elle est nulle puisque l'on a par hypothèse

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = -4\pi M,$$

$$\int \frac{\partial V'}{\partial n} d\sigma = -4\pi M,$$

$V - V'$, le potentiel d'une charge nulle, est donc nul. C'est ce que l'on voulait démontrer.

L'expérience du pendule qui peut faire connaître les valeurs de $g$ à diverses altitudes ne peut donc rien nous apprendre sur la distribution des masses intérieures, que ne nous fassent connaître les éléments considérés dans le théorème de Stokes. De même, nous ne pouvons rien apprendre de plus par les perturbations produites sur le mouvement des autres astres.

***Développement de $\frac{1}{MM'}$ en série de polynomes.*** — Soient O l'origine des coordonnées (fig. 14), M' un point attirant de coordonnées $x'$, $y'$, $z'$, de densité $\rho'$, M $(x, y, z)$ un point attiré.

En prenant les coordonnées polaires on a :

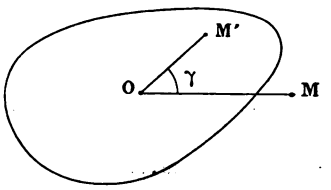


Fig. 14.

$$\begin{cases} x = r\sqrt{1 - \mu^2} \cos\varphi, \\ y = r\sqrt{1 - \mu^2} \sin\varphi, \\ z = r\mu, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r'\sqrt{1 - \mu'^2} \cos\varphi', \\ y' = r'\sqrt{1 - \mu'^2} \sin\varphi', \\ z' = r'\mu', \end{cases}$$

$$\mathrm{MM}'^2 = r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2(xx' + yy' + zz') + x'^2 + y'^2 + z'^2$$
$$\frac{1}{\mathrm{MM}'} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{2r'\cos\gamma}{r} + \frac{r'^2}{r^2}}},$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$
$$\cos\gamma = \frac{x}{r}\frac{x'}{r'} + \frac{y}{r}\frac{y'}{r'} + \frac{z}{r}\frac{z'}{r'}.$$

Développons $\frac{1}{\mathrm{MM}'}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{r}$; le coefficient de $\frac{1}{r^n}$ sera un polynome $\Pi_n(x, y, z;\ x', y', z')$.

On doit avoir les deux relations

$$\Delta\left(\frac{1}{\mathrm{MM}'}\right) = 0,$$
$$\Delta'\left(\frac{1}{\mathrm{MM}'}\right) = 0,$$

la première étant obtenue en considérant $x$, $y$, $z$ comme variables, $x'y'z'$, comme fixes ; c'est l'inverse dans la seconde.

$$\Delta\left(\frac{1}{\mathrm{MM}'}\right) = \frac{\partial^2 \frac{1}{\mathrm{MM}'}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{\mathrm{MM}'}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{\mathrm{MM}'}}{\partial z^2} = 0,$$
$$\Delta'\left(\frac{1}{\mathrm{MM}'}\right) = \frac{\partial^2 \frac{1}{\mathrm{MM}'}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{\mathrm{MM}'}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{\mathrm{MM}'}}{\partial z'^2} = 0.$$

On sait que l'on peut écrire

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{r'}\cos\gamma + \frac{r'^2}{r^2}}} = 1 + \mathrm{P}_1\frac{r'}{r} + \ldots + \mathrm{P}_n\left(\frac{r'}{r}\right)^n + \ldots$$

où $\mathrm{P}_n$ est un polynome en $\cos\gamma$ de la forme

$$\mathrm{A}_0\cos^n\gamma + \mathrm{A}_2\cos^{n-2}\gamma + \ldots\ldots;$$

si on y remplace $\cos\gamma$ par sa valeur, on aura

$$P_n = \frac{Q(x, y, z; x', y', z'; r, r')}{r^n r'^n}.$$

Le polynome Q sera un polynome homogène et de degré $n$ par rapport à chacun des systèmes de variables $(x, y, z, r)$, $(x', y', z', r')$. Il ne contiendra d'ailleurs $r$ et $r'$ qu'à des puissances paires, on pourra donc remplacer $r^2$ et $r'^2$ par leurs valeurs

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2;$$

on aura donc :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{r'^2}{r^2}}} = \sum \frac{Q'_n(x, y, z; x', y', z')}{r^{2n}},$$

$$\frac{1}{MM'} = \sum \frac{Q'}{r^{2n+1}};$$

$Q'$ représente un polynome homogène et de degré $n$ par rapport à chacun des systèmes de variables $x, y, z$; $x', y', z'$, chacun des deux ensembles y entrant de la même façon que l'autre.

On a d'ailleurs

$$\Delta' \frac{1}{MM'} = 0.$$

Donc on a

$$\Delta' \frac{Q'_n}{r^n} = 0;$$

et, comme $r$ ne dépend pas de $x', y', z'$, on a :

$$\Delta'(Q') = 0.$$

$Q'$ est donc un polynome sphérique d'ordre $n$ par rapport aux variables $x', y', z'$ et par suite par rapport aux variables $(x, y, z)$.

Nous savons qu'il y a $2p + 1$ polynomes sphériques d'ordre $p$, de forme

$$P_{pq} = r^p e^{iq\varpi}(1 - \mu^2)^{\frac{q}{2}} \frac{d^{p+q}(1 - \mu^2)^p}{d\mu^{p+q}},$$

où $q$ prend les valeurs

$$-p, -p+1, \ldots\ldots -1, 0, 1, 2, \ldots p-1, p.$$

On peut donc écrire

$$Q' = \sum P_{pq} . Q_{pq},$$

formule où P est un polynome fondamental en $x$, $y$, $z$, Q un polynome en $(x', y', z')$ ; Q' est d'ailleurs fonction de

$$\cos\gamma = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varphi - \varphi')$$

Q' ne dépend donc que de la différence $(\varphi - \varphi')$ : il en résulte que le coefficient de $P_{pq}$ ne peut être que

$$Q_{pq} = r'^p e^{-iq\varphi}(1-\mu'^2)^{\frac{q}{2}} \frac{d^{p+q}(1-\mu'^2)^p}{d\mu^{p+q}},$$

et on pourra écrire :

$$\frac{1}{MM'} = \sum \frac{A_{p,q} P_{p,q} P'_{p,-q}}{r^{2p+1}} ;$$

$A_{p,q}$ est un coefficient numérique que l'on peut déterminer facilement.

***Application.*** — Supposons que $r$ soit suffisamment grand par rapport au rayon de la planète. On pourra développer le potentiel suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{r}$ et on aura

$$V = \sum \frac{B_{pq} P_{pq}}{r^{2p+1}}.$$

D'après ce que l'on a démontré plus haut, la connaissance de S, M et $\omega$ suffit pour déterminer V, donc ces éléments permettent de déterminer $B_{p,q}$ ; or, on a

$$V = \int \frac{\rho' d\tau}{MM'} = \sum \frac{A_{pq} P_{pq}}{r^{2p+1}} \int \rho' P'_{p,-q} d\tau ;$$

il vient donc

$$B_{pq} = A_{pq} \int \rho' P'_{p,-q}\, d\tau'$$

$P'_{p,q}$ est l'un des polynomes sphériques fondamentaux d'ordre $p$. On doit donc savoir calculer

$$\int \rho' P'_{pq} d\tau'.$$

Considérons d'abord le polynome d'ordre 0 : $P_{0.0} = 1$ ; on a

$$\int \rho' d\tau' = M.$$

Les polynomes d'ordre 1 sont $x'$, $y'$, $z'$ : on connaît donc la valeur des intégrales

$$\int \rho' x' d\tau, \quad \int \rho' y' d\tau, \quad \int \rho' z' d\tau.$$

Ce sont, à un facteur près, les coordonnées du centre de gravité de la masse. Supposons que la surface extérieure possède un centre de symétrie, et prenons l'origine des coordonnées en ce centre ; les intégrales sont nulles puisque ce sont les coefficients des termes en $\frac{x}{r^3}$, $\frac{y}{r^3}$, $\frac{z}{r^3}$, dans le développement du potentiel et que les surfaces équipotentielles doivent admettre l'origine comme centre de symétrie. Le centre de gravité de la planète coïncide avec le centre de symétrie.

Les polynomes de second ordre sont

$$\begin{array}{ccc} x'y', & y'z', & z'x', \\ z'^2 - x'^2, & & z'^2 - y'^2. \end{array}$$

Si $\int x' y' \rho' d\tau$ est nulle, ainsi que les deux autres intégrales

analogues, les axes de coordonnées sont les axes principaux d'inertie du système. Si $\int (x'^2 - y'^2)\, \rho d\tau$ est connu, on connaîtra la différence entre les moments principaux d'inertie.

On a trouvé une relation entre $e_1, r_1, D_1$ et $\omega$; les deux premiers éléments sont donnés par la connaissance de S; $D_1$ est connu puisque l'on connaît M et S; $\varphi$ est connu puisque l'on connaît $\omega$; C — A est aussi connu. On doit en conclure que la relation déduite de l'équation de Clairaut est vraie, quand même la distribution intérieure de la matière ne serait pas conforme à l'hypothèse faite pour l'établir.

***Relation entre l'aplatissement, la pesanteur et la force centrifuge à l'équateur.*** — Proposons-nous de calculer les premiers termes du développement de $\frac{1}{MM'}$.

On a d'après la formule du binome

$$\frac{1}{MM'} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2r'}{r}\cos\gamma + \frac{r'^2}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{2r'}{r}\cos\gamma - \frac{r'^2}{r^2}\right)^2 + \ldots\right],$$

négligeant les termes de l'ordre de $\frac{1}{r^4}$; nous avons

$$\frac{1}{MM'} = \frac{1}{r} + \frac{r'\cos\gamma}{r^2} + \frac{1}{r^3}\left[-\frac{r'^2}{2} + \frac{3}{2}r'^2\cos^2\gamma\right],$$

$$\frac{1}{MM'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}\left[xx' + yy' + zz' - \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{2}\right] + \frac{3}{2r^5}(xx' + yy' + zz')^2$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}(xx' + yy' + zz')$$

$$- \frac{1}{2r^5}\left[(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 3(xx' + yy' + zz')^2\right].$$

Le coefficient du terme $-\frac{1}{2r^5}$ peut s'écrire

$$-\frac{3}{2}(x^2 - y^2)(x'^2 - y'^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2)(x'^2 + y'^2 - 2z'^2) - 6(xx'yy' + xx'zz' + yy'zz'),$$

On a alors

$$V=\int\frac{\rho' d\tau}{MM'}=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int\frac{\rho' d\tau}{r}+\sum\frac{x}{r^3}\int\rho' x' d\tau\\ \displaystyle+\frac{3(x^2-y^2)}{4r^5}\int(x'^2-y'^2)\rho' d\tau\\ \displaystyle+\frac{1}{4}\frac{(x^2+y^2-2z^2)}{r^5}\int(x'^2+y'^2-2z'^2)\rho' d\tau\\ \displaystyle+3\sum\frac{xy}{r^5}\int x'y'\rho' d\tau'.\end{array}\right.$$

Si M est la masse, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les coordonnées du centre de gravité, A, B, C les axes principaux d'inertie, on a

$$V=\frac{M}{r}+\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{r^3}+\frac{1}{4r^5}\Big[3(x^2-y^2)(B-A)$$
$$+(x^2+y^2-2z^2)(-A-B+2C)+3\sum\frac{xy}{r^5}\int x'y'\rho' d\tau'.\Big]$$

Supposons que la surface soit de révolution, que l'origine des coordonnées soit placée au centre, que les axes de coordonnées soient les axes principaux d'inertie : alors

$$B=A$$

et

$$V=\frac{M}{r}+\frac{1}{2r^5}(x^2+y^2-2z^2)(C-A).$$

Calculons maintenant la valeur que l'on déduit pour V de la forme extérieure de la surface, que nous supposons un ellipsoïde d'aplatissement $e_1$. Ce potentiel est de la forme

$$V=\frac{M}{r}+HY+\Sigma QZ,$$

où Y est la fonction

$$\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^2}.$$

et Z est une fonction sphérique différente de Y.

H et Q doivent être d'une forme particulière, puisque le potentiel doit s'annuler à l'infini, nous avons déjà vu que l'on avait

$$H=\frac{H_0}{r^3},$$

$$Q=\frac{q_0}{r^{2n+1}},$$

$H_0$ et $q_0$ sont des constantes; on a donc

$$V=\frac{M}{r}+\frac{H_0Y}{r^3}+\sum\frac{q_0Z}{r^{n+1}}.$$

A la surface libre on a

$$U=V+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)=C^{te}.$$

$$=V+\frac{\omega^2}{3}r^2+\frac{\omega^2r^2Y}{6}=C^{te}.$$

Il vient donc

$$\frac{M}{r}+\frac{\omega^2r^2}{3}+\frac{\omega^2r^2Y}{6}+\frac{H_0Y}{r^3}+\sum\frac{Q_0Z}{r^{n+1}}=C^{te}.$$

Posons

$$r=r_1+\zeta.$$

On a vu (p. 6β) que l'on avait

$$e_1=\frac{3\zeta}{r_1Y},$$

de plus on a

$$r=r_1\left[1+\frac{\beta Y}{r_1^3}\right].$$

Tous les termes étant petits, sauf le premier, on peut y négliger $e_1^2$ et on a

$$\frac{M}{r} = \frac{M}{r_1\left(1 + \frac{e_1 Y}{3}\right)} = \frac{M}{r_1}\left(1 - \frac{e_1 Y}{3}\right).$$

L'équation $U = C^{te}$ se réduit donc à

$$\frac{M}{r_1} - \frac{Me_1 Y}{3r_1} + \frac{\omega^2 r_1^2}{3} + \frac{\omega^2 r_1^2 Y}{6} + \frac{H_0 Y}{r_1^3} + \frac{\Sigma q_0 Z}{r_1^{n+1}} = C^{te}.$$

Comme par hypothèse nous avons un ellipsoïde : $q_0 = 0$; donc V se réduit à

$$\frac{M}{r} + \frac{H_0 Y}{r^3}$$

et on conclut, en comparant les deux valeurs de V, que

$$H_0 = \frac{C - A}{2}.$$

On a donc l'équation

$$\frac{M}{r_1} - \left(\frac{Me_1}{3r_1} - \frac{C - A}{2r^3}\right) Y + \frac{\omega^2 r_1^2}{3} + \frac{\omega^2 r_1^2 Y}{6} = C^{te};$$

on en conclut que le coefficient de Y est nul, et que l'on a

$$\frac{Me_1}{3r_1} = \frac{C - A}{2r_1^3} + \frac{\omega^2 r_1^2}{6}.$$

On a d'ailleurs

$$M = \frac{4}{3}\pi D_1 r_1^3,$$

$$g_0 = \frac{M}{r_1^2},$$

$$\omega^2 r_1 = \varphi_1 g_0 = \varphi_1 \frac{M}{r_1^2}.$$

Il vient donc

$$\frac{C - A}{2r_1^3} = g_0 \frac{r_1 e_1}{3} - \frac{\varphi_1 g_0 r_1}{6},$$

$$\frac{C - A}{r_1^3} = \frac{2r_1 g_0}{3}\left(e_1 - \frac{\varphi_1}{2}\right);$$

et, en supposant le rayon de la terre égal à l'unité, on a

$$C - A = \frac{2g_0}{3}\left(e_1 - \frac{\varphi}{2}\right).$$

***Pesanteur en un point de la surface.*** — Les composantes de la pesanteur sont $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$, et on a

$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

La composante suivant le rayon OM est, $\varepsilon$ étant le cosinus de l'angle de la verticale avec le rayon OM,

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = g\cos\varepsilon\,;$$

comme $\varepsilon$ est petit, $g \cos \varepsilon$ est sensiblement égal à $g$, aux quantités du second ordre près, on a donc

$$g = -\frac{\partial U}{\partial r},$$

$$g = \frac{M}{r^2} + 3\,\frac{(C-A)}{2}\,\frac{Y}{r^4} - \frac{2\omega^2 r}{3} - \frac{\omega^2 r Y}{3}.$$

Si maintenant on fait $r = 1 + \zeta$,

$$\frac{1}{r^2} = 1 - 2\zeta,$$

on trouve

$$g = M - 2M\zeta + \frac{3}{2}(C-A)Y - \frac{2\omega^2}{3} - \frac{\omega^2 Y}{3},$$

$$g = M(1 - 2\zeta) + g_0\left(e_1 - \frac{\varphi}{2}\right)Y - \frac{2\omega^2}{3} - \frac{\omega^2 Y}{3}.$$

$$g = g_0\left(1 - \frac{2e_1 Y}{3}\right) + g_0\left(e_1 - \frac{\varphi}{2}\right)Y \mp \frac{2\varphi g_0}{3} - \frac{\varphi g_0 Y}{3}$$

$$\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{e_1 Y}{3} - \frac{5\varphi}{6}Y \mp \frac{2\varphi}{3}$$

$$= 1 \mp \frac{2\varphi}{3} + \frac{Y}{3}\left(e_1 - \frac{5\varphi}{2}\right).$$

C'est la formule de Clairaut qui donne la pesanteur en un point, en fonction de la latitude de ce point.

***Influence de l'altitude.*** — Si on s'élève en ballon, la correction est facile à faire, on n'a, dans la formule, qu'à remplacer $r$ par $1 + \zeta + h$, au lieu de le remplacer par $1 + \zeta$, mais ce n'est pas dans ce cas que l'on a à faire la correction d'altitude : le plus fréquemment cette correction se présente pour un lieu situé sur un plateau, et il faut tenir compte de l'attraction due à ce plateau.

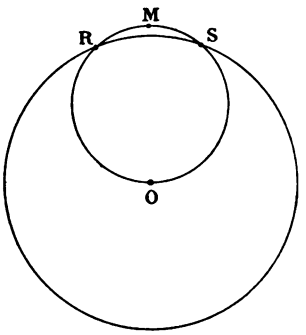

Fig. 15.

Il faudra donc tenir compte des aspérités positives ou négatives; il faudra d'abord choisir une surface définissant le niveau général du plateau : cette surface sera la sphère décrite sur OM comme diamètre (fig. 15), O étant le centre du sphéroïde, M le lieu de l'observation. On calcule l'attraction due au volume compris entre les deux sphères, l'erreur est peu considérable et d'autant moins que l'attraction des montagnes est très faible. On prend, en général, comme densité de la masse la densité moyenne des roches à la surface, c'est-à-dire $\frac{1}{2} D_1$, en représentant par $D_1$ la densité moyenne du sphéroïde.

***Correction de Bouguer.*** — Supposons une couche sphérique homogène d'épaisseur $h$ et de densité $\rho$ ; le volume de cette couche sera

$$4\pi r_1^2 h,$$

et sa masse

$$4\pi h r_1^2 \rho.$$

La correction apportée à la mesure de $g$ sera $4\pi\rho h r_1^2$ et on a

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{4\pi\rho h}{\frac{4}{3}\pi D_1 r_1} = \frac{3\rho h}{D_1 r_1}.$$

D'un point M situé à une certaine distance au-dessus de la couche, menons le cône tangent à la sphère (fig. 16) ; le cercle de contact partage la couche en deux portions, et nous savons que les attractions de chacune de ces deux portions sur le point M sont égales.

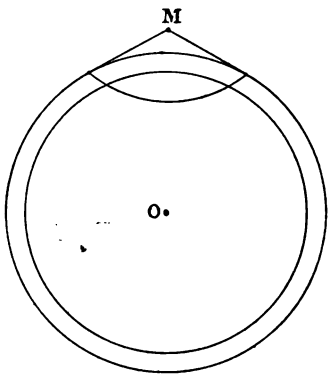

Fig. 16.

Appliquons ici ce théorème. Nous avons supposé que la surface de la planète était limitée à la sphère décrite sur OM comme diamètre ; si donc on suppose que l'attraction de la masse MRS se compose de l'attraction d'un certain nombre de couches homogènes et minces, la partie de ces couches limitée à la sphère (OM) aura sur M la même action que la moitié de la couche totale. Il faut donc calculer l'attraction sur M d'une couche entourant le sphéroïde de densité $\rho$ et d'épaisseur $h$ égale à l'altitude du point M. La correction à apporter à la pesanteur sera la moitié de cette attraction.

L'épaisseur $h$ de la couche peut se représenter par un développement de la forme

$$h = \sum \frac{AY}{r^n} ;$$

le potentiel dû à cette couche, d'après une formule connue sera

$$\sum \frac{4\pi AY}{(2n+1)r^{n+1}} ;$$

l'accroissement de $g$ sera

$$\delta g = -\frac{\partial \delta V}{\partial r} = \sum AY 4\pi \frac{n+1}{2n+1},$$

car on fait ensuite $r = 1$ dans la formule, et on a

$$\frac{\delta g}{g_0} = \frac{3\rho}{D_1} + \sum \frac{n+1}{2n+1} AY.$$

Si on se borne au terme $n = 0$

$$\frac{\delta g}{g_0} = \frac{3\rho}{D_1};$$

si on en prend la moitié, c'est la correction de Bouguer.

La correction totale comprend donc deux termes : 1° celui qui provient de l'augmentation d'altitude sans tenir compte du plateau; 2° celui où l'on tient compte de la masse du plateau, on a finalement la formule

$$\frac{\delta g}{g_0} = -\frac{2h}{r_1} + \frac{3}{2}\frac{\rho h}{D_1 r_1}.$$

Si on applique cette formule on trouve une valeur trop faible : la valeur fournie par l'observation est, en général, sur les continents, inférieure à la valeur calculée ; elle lui est au contraire supérieure sur les océans et dans les îles isolées.

M. Faye a ainsi trouvé qu'il vaut mieux ne pas tenir compte de la correction de Bouguer, ce qui correspond à des masses qui devraient se trouver sous les océans, et à des vides qui existeraient dans les continents.

A la surface des mers on a $U = U_0$. La surface $U = U_0$ est une surface qui, se prolongeant sous les continents, doit donner une surface de révolution, mais il n'en est pas ainsi. Cette surface s'appelle le géoïde.

***Pesanteur en un point de la surface du géoïde.*** — Considérons une sphère de rayon voisin du rayon de la terre ; soit $\zeta$ l'altitude du continent au-dessus de cette sphère, on peut écrire

$$\zeta = \sum HY;$$

$\zeta'$ la distance à l'ellipsoïde, peut s'écrire

$$\zeta' = \sum (H - q)\, Y,$$

$\zeta - \zeta'$ est la distance de la sphère à l'ellipsoïde au lieu considéré ;

$$\zeta - \zeta' = \sum qY.$$

Soit $h$ l'altitude du point au-dessus du géoïde,

$$h = \sum kY$$

$\zeta' - h$ est la surélévation du géoïde au-dessus de l'ellipsoïde : on a

$$\zeta' - h = \sum (H - q - k)\, Y,$$

$\zeta - \zeta'$ se réduit à deux termes : celui qui correspond à $Y = 1$, et celui qui correspond à $Y = \dfrac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^2}$.

A la surface du géoïde $U = g_0 =$ constante ; en un point d'altitude $h$, on a

$$U = g_0 + \frac{\partial U}{\partial r} h ;$$

On a d'ailleurs

$$-\frac{\partial U}{\partial r} = g_0.$$

Donc

$$\frac{U}{g_0} = 1 + \sum (H - k) Y$$

$$\frac{V}{g_0} = 1 + \sum (H - k - \gamma)\, Y.$$

Les coefficients $\gamma$ sont connus : ils correspondent au développement de

$$\frac{\omega^2}{2g_0} \cdot (x^2 + y^2);$$

si on rétablit l'homogénéité, on a

$$\frac{V}{g_0} = \frac{1}{r} + \frac{\Sigma (H - k - \gamma)\, Y}{r^{n+1}},$$

et comme on a :

$$g = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

on en conclut :

$$\frac{g}{g_0} = \frac{1}{r^2} + \frac{\Sigma (n+1)(\mathrm{H} - k - \gamma)\mathrm{Y}}{r^{n+2}}.$$

Les opérations géodésiques font connaître $h$, les opérations de nivellement font connaître $\zeta$, les observations pendulaires font connaître $g$. Théoriquement, deux séries d'observations suffiraient pour connaître $\zeta$, $h$ et $g$ ; mais pratiquement les observations d'aucune des trois espèces ne sont assez nombreuses, ni assez précises pour qu'on puisse se passer d'une série d'observations.

Jusqu'à présent l'on peut dire que l'on a trouvé la surface du géoïde peu différente de celle d'un ellipsoïde de révolution.

Nous allons, dans ce qui suit, montrer qu'il peut exister des figures d'équilibre autres que l'ellipsoïde de révolution.

# CHAPITRE VI

## FONCTIONS DE LAMÉ

***Coordonnées elliptiques.*** — Considérons les quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0.$$

Par un point de l'espace passent trois de ces surfaces : en effet, $x$, $y$, $z$ étant donnés, on a pour déterminer $\lambda^2$ une équation du troisième degré dont les trois racines sont séparées par les nombres $a^2$, $b^2$, $c^2$.

Il en résulte que l'une des racines, la plus grande, supérieure à $a^2$, correspond à un ellipsoïde; la racine moyenne, comprise entre $a^2$ et $b^2$, définit un hyperboloïde à une nappe; la troisième, comprise entre $b^2$ et $c^2$, définit un hyperboloïde à deux nappes.

Soit $\rho^2$, $\mu^2$, $\nu^2$ ces racines, on a donc

$$\rho^2 > a^2 > \mu^2 > b^2 > \nu^2 > c^2.$$

Réciproquement si $\rho$, $\mu$, $\nu$ sont donnés, on a trois surfaces se coupant en huit points, placés symétriquement par rapport aux divers plans de coordonnées.

Si on ne considère que les points situés dans un trièdre trirectangle donné, les trois nombres $\rho$, $\mu$, $\nu$ définissent un point et un seul.

On peut écrire

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = \frac{-(\lambda^2 - \rho^2)(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}.$$

Si on multiplie par $\lambda^2 - a^2$, et qu'on fasse ensuite $\lambda^2 = a^2$, on a

$$x^2 = -\frac{(a^2-\rho^2)(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)};$$

on obtiendra donc

$$x = \sqrt{\frac{(\rho^2-a^2)(\mu^2-a^2)(\nu^2-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}};$$

et de même pour $y$ et $z$,

$$y = \sqrt{\frac{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}},$$

$$z = \sqrt{\frac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}.$$

Le signe qu'il faut prendre devant le radical correspond au trièdre des coordonnées que l'on considère.

Soit $f(x)$ un polynome, et posons

$$R = f(\rho^2),$$
$$M = f(\mu^2),$$
$$N = f(\nu^2),$$

RMN sera un polynome symétrique des trois quantités $\rho^2$, $\mu^2$, $\nu^2$ racines de l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2-a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2-b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2-c^2} = 1$$

et par suite une fonction entière de $x^2$, $y^2$, $z^2$.

Si on pose

$$R = f(\rho^2)\sqrt{\rho^2-a^2}$$

ou bien

$$R = f(\rho^2)\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)}$$

ou encore

$$R = f(\rho^2)\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}$$

et que l'on prenne pour M et N les mêmes fonctions de $\mu$ et de $\nu$, RMN sera un polynôme en $x^2$, $y^2$, $z^2$, multiplié par $x$, par $xy$ ou par $xyz$.

Supposons que R soit un polynôme entier en $\rho^2$; on peut le décomposer en facteurs du premier degré et écrire

$$R = \Pi(\rho^2 - \lambda_1^2).$$

Alors

$$\begin{aligned} RMN &= \Pi(\rho^2 - \lambda_1^2)(\mu^2 - \lambda_1^2)(\nu^2 - \lambda_1^2) \\ (1) \qquad &= \Pi\left[\frac{x^2}{\lambda_1^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda_1^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda_1^2 - c^2} - 1\right]. \end{aligned}$$

RMN sera donc, dans tous les cas possibles, un produit de facteurs de la forme (1) multiplié par un certain nombre de quantités $x$, $y$, $z$.

***Élément linéaire en coordonnées elliptiques.*** — Les surfaces $\rho = C^{te}$, $\mu = C^{te}$, $\nu = C^{te}$ forment un système triple orthogonal et l'élément linéaire peut s'écrire :

$$ds^2 = \alpha^2 d\rho^2 + \beta^2 d\mu^2 + \gamma^2 d\nu^2,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant des fonctions de $\rho$, $\mu$, $\nu$ que nous allons déterminer; on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{\rho d\rho}{\rho^2 - a^2} + \frac{\mu d\mu}{\mu^2 - a^2} + \frac{\nu d\nu}{\nu^2 - a^2},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\rho d\rho}{\rho^2 - b^2} + \frac{\mu d\mu}{\mu^2 - b^2} + \frac{\nu d\nu}{\nu^2 - b^2},$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{\rho d\rho}{\rho^2 - c^2} + \frac{\mu d\mu}{\mu^2 - c^2} + \frac{\nu d\nu}{\nu^2 - c^2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 = {} & \rho^2 d\rho^2\left[\frac{x^2}{(\rho^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - c^2)^2}\right] \\ & + \mu^2 d\mu^2\left[\frac{x^2}{(\mu^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\mu^2 - c^2)^2}\right] \\ & + \nu^2 d\nu^2\left[\frac{x^2}{(\nu^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\nu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\nu^2 - c^2)^2}\right], \end{aligned}$$

et ensuite

$$\frac{\alpha^2}{\rho^2} = \frac{(\mu^2-\rho^2)(\nu^2-\rho^2)}{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}.$$

Je vais poser

$$Q^2 = (\mu^2-\rho^2)(\rho^2-\nu^2)(\nu^2-\mu^2),$$
$$A^2 = \frac{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}{\rho^2},$$
$$B^2 = \frac{(\mu^2-a^2)(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}{\mu^2},$$
$$C^2 = \frac{(\nu^2-a^2)(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}{\nu^2},$$

$A^2$ et $C^2$ sont positifs, $B^2$ est négatif; donc A et C sont réels, B est purement imaginaire.

Avec ces notations on a

$$\alpha = \frac{Q}{A\sqrt{\mu^2-\nu^2}},$$
$$\beta = \frac{Q}{B\sqrt{\nu^2-\rho^2}},$$
$$\gamma = \frac{Q}{C\sqrt{\rho^2-\mu^2}};$$

$\sqrt{\nu^2-\rho^2}$ est purement imaginaire, donc $\beta$ est réel.

***Equation de Laplace.*** — Voyons ce que devient l'équation de Laplace en coordonnées elliptiques. Nous avons déjà établi (p. 40), que si on désigne l'élément linéaire par

$$ds^2 = \alpha^2 d\rho^2 + \beta^2 d\mu^2 + \gamma^2 d\nu^2,$$

on a

$$\Delta V = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\sum \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\beta\gamma}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial\rho}\right].$$

L'équation $\Delta V = 0$ devient donc :

$$\sum \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0.$$

On a

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha} = \frac{AQ}{BC}\sqrt{\frac{\mu^2-\nu^2}{(\nu^2-\rho^2)(\rho^2-\mu^2)}}$$
$$= \frac{A\sqrt{-1}\,(\mu^2-\nu^2)}{BC};$$

et l'équation de Laplace est alors :

$$\sum \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{A}{BC}(\mu^2-\nu^2)\frac{\partial V}{\partial\rho}\right] = 0;$$

A seul dépend de $\rho$. On a donc

$$\sum \frac{\mu^2-\nu^2}{BC}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[A\frac{\partial V}{\partial\rho}\right] = 0;$$

en multipliant par ABC on obtient l'équation

$$\sum A(\mu^2-\nu^2)\frac{\partial}{\partial\rho}\left[A\frac{\partial V}{\partial\rho}\right] = 0$$

$$(2) \qquad \sum\left[A^2\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2} + A\frac{dA}{d\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}\right](\mu^2-\nu^2) = 0.$$

Les coefficients de cette équation sont réels, car $A^2$, $B^2$, $C^2$ sont réels, et par suite leurs dérivées le sont aussi.

***Fonctions de Lamé.*** — Parmi les solutions de l'équation de Laplace, il y a des polynomes de la forme RMN : on les appelle fonctions de Lamé.

Remarquons d'abord que nous avons les identités évidentes :

$$\sum(\mu^2-\nu^2) = 0;$$

$$\sum\rho^2(\mu^2-\nu^2) = 0.$$

Il en résulte que l'équation (2) est équivalente à la suivante

$$\sum\left[A^2\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2} + A\frac{dA}{d\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho} + H\rho^2 V + KV\right](\mu^2-\nu^2) = 0.$$

Supposons que l'on ait $V = RMN$ et que R satisfasse à l'équation

$$(3) \qquad A^2 \frac{d^2R}{d\rho^2} + A \frac{dA}{d\rho} \frac{dR}{d\rho} + H\rho^2 R + KR = 0;$$

M et N satisferont à des équations analogues, et la fonction V satisfera à l'équation de Laplace. Cette condition suffisante est aussi nécessaire, c'est-à-dire que si V est de la forme RMN et satisfait à l'équation de Laplace, R satisfait à l'équation (3), et par suite M et N satisfont aux équations analogues obtenues en remplaçant $\rho$ par $\mu$ et $\nu$, et A par B et C.

En effet si on fait $\mu = \nu$ l'équation doit être encore vérifiée ; R se réduit à M en ce cas, et l'équation se réduit à

$$B^2 \frac{d^2M}{d\mu^2} + B \frac{dB}{d\mu} \frac{dM}{d\mu} + H\mu^2 M + KM = 0.$$

Existe-t-il de telles fonctions ? Considérons la fonction $p(u)$ définie par l'équation différentielle

$$p'u = 2\sqrt{(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)},$$

où

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} \rho^2 &= pu + h, \\ a^2 &= e_1 + h, \\ b^2 &= e_2 + h, \\ c^2 &= e_3 + h ; \end{aligned}$$

on en conclut

$$h = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} p'u &= 2\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} \\ &= 2A\rho. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$p'u \frac{du}{d\rho} = 2\rho;$$

donc

$$A = \frac{d\rho}{du}$$

et par suite

$$A\frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{d\rho}\frac{d\rho}{du} = \frac{dR}{du}.$$

L'équation

$$A\frac{d}{d\rho}\left[A\frac{dR}{d\rho}\right] + (H\rho^2 + K)R = 0$$

devient

$$\frac{d^2R}{du^2} + (H\rho^2 + K)R = 0.$$

Peut-on choisir H et K de manière que R soit un polynome en $\rho$, ou un tel polynome multiplié soit par $\sqrt{\rho^2 - a^2}$, soit par $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, soit par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$?

Ce polynome, si on y remplace $\rho^2$ par $p(u)$, sera une fonction doublement périodique admettant les deux périodes de $p(u)$ $2\omega_1$ et $2\omega_2$. Elle admettra une double infinité de pôles qui seront les pôles de $p(u)$, c'est-à-dire $u = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, $m$ et $n$ étant des entiers positifs, négatifs ou nuls. Ces pôles qui sont des pôles doubles de $p(u)$ seront pour le polynome des pôles d'ordre $2n$.

De plus $\sqrt{\rho^2 - a^2} = \sqrt{pu - e_1}$, est une fonction doublement périodique admettant les périodes $2\omega_1$ et $4\omega_2$ et ayant comme pôles simples les pôles de $p(u)$; donc si on ajoute à $u$ la valeur $2\omega_1$, $2\omega_2$ ou $2\omega_3$, la fonction R garde sa valeur ou change de signe suivant qu'elle contient 0 ou 2 radicaux, ou bien qu'elle est le produit d'un polynome par 1 ou 3 radicaux.

Donc R est une fonction paire, ou une fonction impaire, mais dans un cas comme dans l'autre on doit avoir le développement

$$R = \frac{a_0}{u^n} + \frac{a_1}{u^{n-2}} + \frac{a_2}{u^{n-4}} + \ldots\ldots;$$

si on porte cette valeur dans l'équation, en se rappelant que

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \alpha u^2 + \ldots.$$

on obtient l'équation :

$$\left[\frac{n(n+1)a_0}{u^{n+2}}+\frac{(n-1)(n-2)a_1}{u^n}+\ldots\right]$$
$$+\left[\mathrm{H}\left(\frac{1}{u^2}+\alpha u^2+\ldots\right)+\mathrm{K}\right]\left[\frac{a_0}{u^n}+\frac{a_1}{u^{n-2}}+\ldots\right]=0.$$

Pour que cette équation soit vérifiée il faut d'abord que le terme en $\frac{1}{u^{n+2}}$ disparaisse, ce qui n'est possible que si l'on a

$$\mathrm{H}=-n(n+1).$$

On a d'ailleurs si $q$ est le degré de R, et qu'il faille lui ajouter $p$ radicaux, ($p=1$, 2 ou 3) :

$$n=2q+p.$$

***Formation des fonctions de Lamé.*** — Ainsi donc les polynomes de Lamé, doivent s'ils existent satisfaire aux conditions suivantes.

Regardés comme fonctions de $x$, $y$, $z$ ce sont des produits de facteurs quadratiques multipliés par un ou plusieurs des facteurs $x$, $y$, $z$. Si on remplace $x, y, z$ par leur valeur en fonction de $\rho^2, \mu^2, \nu^2$, on obtient une fonction de la forme RMN, où R désigne, soit un polynome en $\rho^2$, soit un tel polynome multiplié par 1, 2 ou 3 des radicaux

$$\sqrt{\rho^2-a^2},\ \sqrt{\rho^2-b^2},\ \sqrt{\rho^2-c^2},$$

et M, N désignent les mêmes fonctions ou $\rho$ est remplacé par $\mu$ et $\nu$.

On a pour Q huit formes possibles, à chacune desquelles correspond une forme pour R. Si $n$ est le degré de Q, le degré de R en $\rho^2$ sera suivant le cas

$$\frac{n}{2},\ \frac{n-1}{2},\ \frac{n-2}{2}\ \text{ou}\ \frac{n-3}{2},$$

suivant que R contiendra 0, 1, 2 ou 3 radicaux.

Enfin si dans R on remplace $\rho^2$ par $pu$, on obtient une fonction qui, lorsqu'on remplace $u$ par $u+2\omega_1$, change son signe ou reste

invariable, suivant qu'il y a un nombre impair ou pair des deux radicaux $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ et $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, car $\sqrt{pu - e_1}$ ne change pas de signe pour $u + 2\omega_1$.

De même quand on augmente $u$ de $2\omega_2$, $\sqrt{pu - e_1}$ et $\sqrt{pu - e_3}$ changent de signe et par suite R changera de signe ou non, suivant qu'il contiendra un nombre impair ou pair de ces radicaux.

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant, où la première colonne contient la forme de Q, la seconde la forme correspondante de R, la troisième le degré du polynome qui entre dans R en fonction du degré de Q, la quatrième et la cinquième indiquant si la fonction change de signe pour l'adjonction à $u$ des périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$; $Q_1$ désigne uniquement un produit de facteurs quadratiques.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $Q_1$ . . | R ne contient pas de radical | $\frac{n}{2}$ | $+$ | $+$ | $\frac{n+2}{2}$ |
| $Q_1x$. . | R contient $\sqrt{\rho^2 - a^2}$ | $\frac{n-1}{2}$ | $+$ | $-$ | $\frac{n}{2}$ |
| $Q_1y$. . | » $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ | | $-$ | $+$ | |
| $Q_1z$. . | » $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ | | $-$ | $-$ | |
| $Q_1yz$. . | » $\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}$ | $\frac{n-2}{2}$ | $+$ | $-$ | $\frac{n+1}{2}$ |
| $Q_1zx$ . | » $\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{\rho^2 - a^2}$ | | $-$ | $+$ | |
| $Q_1xy$ . | » $\sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\rho^2 - b^2}$ | | $-$ | $-$ | |
| $Q_1xyz$. | » $\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$ | $\frac{n-3}{2}$ | $+$ | $+$ | $\frac{n-1}{2}$ |

***Détermination de K.*** — Ceci posé, cherchons à déterminer K. Pour les fonctions du premier genre, R est un polynome d'ordre $\frac{n}{2}$ contenant $\frac{n}{2} + 1$ coefficients homogènes.

Substituons dans l'équation différentielle, nous avons un polynome de degré $\frac{n}{2} + 1$, qui devra être identiquement nul. Le coefficient du terme de degré le plus élevé disparaît de lui-même à cause de l'hypothèse $\Pi = -n(n+1)$. Il reste alors $\frac{n}{2} + 1$ coefficients à faire disparaître.

Les $\frac{n}{2} + 1$ coefficients du polynome doivent donc satisfaire

à $\frac{n}{2}+1$ équations linéaires et homogènes, dont les coefficients dépendent linéairement de K; l'élimination des coefficients du polynome donnera donc pour K une équation de degré $\frac{n}{2}+1$.

Si R est du second type, on aura à déterminer $\frac{n+1}{2}$ coefficients d'un polynome de degré $\frac{n-1}{2}$. Le degré de l'équation en K sera donc, d'après un raisonnement analogue au précédent, $\frac{n+1}{2}$.

Pour ceux du troisième, l'équation en K sera de degré $\frac{n}{2}$.

Pour ceux du quatrième, l'équation en K sera de degré $\frac{n-1}{2}$.

Ces résultats figurent dans la sixième colonne du tableau précédent.

Il résulte de ceci qu'à chacune des racines des équations en K ainsi obtenues correspond un polynome et un seul.

Si $n$ est pair, il n'y a de polynomes que de première et de troisième espèce; leur nombre est

$$\frac{n}{2}+1+3\frac{n}{2}=2n+1.$$

Si $n$ est impair il n'y a de polynome que de seconde et quatrième espèce; leur nombre total

$$\frac{n-1}{2}+3\frac{n+1}{2}=2n+1.$$

Donc il y a au plus $2n+1$ polynomes de Lamé. Je dis au plus, car les équations en K pourraient avoir des racines multiples; nous verrons qu'il n'en est rien.

***Analogie avec les fonctions sphériques.*** — Supposons que $x$, $y$, $z$ soient infinis du premier ordre; $\mu$ et $\nu$ restent essentiellement finis, mais $\rho$ deviendra infini du premier ordre aussi.

L'ensemble homogène des termes de degré le plus élevé dans

la fonction de Lamé, satisfait évidemment à l'équation de Laplace. C'est donc un polynôme sphérique que l'on peut écrire $\Pi(x,y,z)$. Le terme de degré le plus élevé dans RMN en $\rho$ sera $\alpha\rho^n$MN.

Passons aux coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

si $\rho$ est très grand il diffère peu de $r$; $\mu$, $\nu$ dépendront au contraire de $\varphi$ et de $\theta$.

En effet l'équation qui détermine $\mu$ peut s'écrire

$$\frac{x^2}{\mu^2 - a^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} - 1 = 0.$$

Si $x, y, z$ sont très grands, l'unité est négligeable; il reste une équation du second degré; $\mu$ et $\nu$ les deux racines non infiniment grandes ne dépendent que du rapport $\frac{y}{x}$ et $\frac{z}{x}$ c'est-à-dire de $\varphi$ et de $\theta$.

On peut alors écrire

$$r^n\Pi(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = \alpha\rho^n\text{MN},$$

et comme $r = \rho$, on a

$$\Pi(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = \alpha\text{MN};$$

le produit MN apparaît donc comme une fonction sphérique, et $\Pi$ sera décomposable en un produit de facteurs quadratiques [1]. M. Moutard a démontré que c'était le seul cas où un polynome sphérique était décomposable en un produit de facteurs quadratiques et de facteurs linéaires.

MN, considérée comme fonction de $\theta$ et de $\varphi$, est donc une fonction sphérique : il en résulte que toute fonction de $\mu$ et $\nu$ peut se mettre sous la forme d'une somme

$$\sum \alpha\text{MN},$$

---

[1] Voir *Journal de Liouville*, t. XI, 1846, p. 278.

puisque toute fonction peut se mettre sous la forme d'une somme de fonctions sphériques; mais l'analogie des fonctions sphériques et des fonctions de Lamé, va apparaître davantage quand on étudiera le cas où les surfaces homofocales sont de révolution.

***Cas des ellipsoïdes de révolution.*** — Cela peut se présenter de deux manières différentes suivant que l'on a $a = b$, ou $b = c$.

1° Si $a = b$, on a des ellipsoïdes de révolution ~~aplatis~~ allongés quand $\lambda^2$ est supérieur à $a^2$ et des hyperboloïdes à deux nappes si $a^2 < \lambda^2 < c^2$. Les hyperboloïdes à une nappe se réduisent à des plans passant par l'axe $Oz$.

2° Si $b = c$, on a des ellipsoïdes de révolutions ~~allongés~~ aplatis autour de $Ox$, pour $\lambda^2 > a^2$. Si $a^2 > \lambda^2 > b^2$ on a des hyperboloïdes à une nappe, les hyperboloïdes à deux nappes se réduisant à des plans passant par l'axe $Ox$.

Dans ces deux cas, soit $\mu$, soit $\nu$ ne peut servir de paramètre, on est obligé de prendre comme paramètre l'angle du plan avec un plan fixe, le plan $xOz$ par exemple dans les deux cas. Nous avons :

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{(\rho^2 - a^2)(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)}}\sqrt{\frac{a^2 - \lambda^2}{b^2 - c^2}}.$$

Si $b$ tend vers $a$, $\mu$ tend aussi vers $a$, et l'on voit que l'on a :

$$\frac{y}{x} = \lim \sqrt{\frac{\mu^2 - b^2}{a^2 - \mu^2}}.$$

Si $\varphi$ est l'angle du plan passant par le point $(x, y, z)$ et l'axe $Oz$ avec le plan $xOz$, on voit que $\mu$ peut être considéré comme fonction de $\varphi$, et l'on a

$$\mu^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi.$$

On voit que l'on a

$$\lim \sqrt{\frac{a^2 - \mu^2}{a^2 - b^2}} = \sin \varphi,$$

$$\lim \sqrt{\frac{\mu^2 - b^2}{a^2 - b^2}} = \cos \varphi.$$

Dans les mêmes conditions l'équation qui détermine $\nu$ peut s'écrire en supprimant l'unité, négligeable devant $x$, $y$ et $z$,

$$\frac{x^2+y^2}{\nu^2-a^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=0.$$

Si on passe aux coordonnées polaires, on a

$$\frac{r^2\sin^2\theta}{\nu^2-a^2}+\frac{r^2\cos^2\theta}{\nu^2-c^2}=0\ ;$$

et ensuite

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{a^2-c^2}},$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{\nu^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Dans ce cas on peut immédiatement former les fonctions de Lamé.

Nous savons que MN est une fonction sphérique ; M ne dépend que de $\varphi$, N ne dépend que de $\theta$ ; MN est donc l'une des fonctions sphériques fondamentales considérées plus haut (p. 43).

On peut alors écrire $M=\cos p\varphi$ ou $\sin p\varphi$ ; et pour N on prendra

$$F_n^p(\cos\theta)=F_n^p\left[\sqrt{\frac{\nu^2-c^2}{a^2-c^2}}\right]$$

en posant :

$$F_n^p(t)=(1-t^2)^{\frac{p}{2}}\,\frac{d^{n+p}(1-t^2)^n}{dt^{n+p}}.$$

On voit que les zéros de N se déterminent en calculant les zéros de $F_n^p$, abstraction faite des zéros $\pm 1$. Ces zéros sont tous réels et distincts ; car, comme on le voit par le théorème de Rolle, les zéros de $F_n^p$ séparent les zéros de $F_n^{p-1}$. On a

$$(1-t^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{a^2-b^2}}.$$

Donc si $p$ est pair, $F_n^p$ ne changera pas de signe avec $\sin\theta$ ; au contraire si $p$ est impair, $F_n^p$ changera de signe avec $\sin\theta$.

Si on remplace $x, y, z$ par leurs valeurs en coordonnées polaires,

Q changera de signe s'il contient l'un des facteurs $x$ ou $y$; mais s'il n'en contient aucun, ou s'il en contient deux, il ne changera pas de signe; $p$ sera donc impair dans le premier cas, et pair dans le second.

On voit aussi que $y$ et $\sin p\varphi$ changent de signe en même temps; donc si Q contient le facteur $y$, M devra être pris égal à $\sin p\varphi$, sinon, M devra être pris égal a $\cos p\varphi$.

De même si $b^2 = c^2$, on prendra comme coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$z = r\sin\theta\sin\varphi.$$

La fonction N sera $\sin p\varphi$ ou $\cos p\varphi$, la fonction M sera

$$F_n^p(\cos\theta).$$

On prendra $p$ impair si Q contient l'un des facteurs $y$ ou $z$; $p$ sera pair au contraire si Q ne contient aucun de ces facteurs ou s'il les contient tous deux. On prendra pour N, $\sin p\varphi$ ou $\cos p\varphi$ suivant que Q contient ou ne contient pas le facteur $z$.

***Résumé.*** — Le résultat de cette discussion est résumé dans le tableau suivant : la première colonne contient les 8 formes possi-

| | | $a^2 = b^2$ | | $b^2 = c^2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| P. . . . . | R | 0 | Cos | 0 | Cos |
| P $\times x$. . . | $R\sqrt{\rho^2 - a^2}$ | 1 | Cos | 0 | Cos |
| P $\times y$. . . | $R\sqrt{\rho^2 - b^2}$ | 1 | Sin | 1 | Cos |
| P $\times z$. . . | $R\sqrt{\rho^2 - c^2}$ | 0 | Cos | 1 | Sin |
| P $\times zy$ . . | $R\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$ | 1 | Sin | 0 | Sin |
| P $\times zx$ . . | $R\sqrt{(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - a^2)}$ | 1 | Cos | 1 | Sin |
| P $\times xy$ . . | $R\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}$ | 0 | Sin | 1 | Cos |
| P $\times xyz$. . | $R\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$ | 0 | Sin | 0 | Sin |

bles de Q, la seconde contient les formes correspondantes de R, la troisième et la quatrième contiennent les cas limites pour $a^2 = b^2$; dans la troisième on a mis le signe o si $p$ est pair, 1 si $p$ est impair ; la quatrième indique si M se réduit à $\cos p\varphi$ ou $\sin p\varphi$; la cinquième et la sixième contiennent les indications correspondantes dans le cas où $b^2 = c^2$.

***Les valeurs de K sont réelles.*** — Nous allons maintenant démontrer que les équations en K ont toutes leurs racines réelles.

Supposons d'abord $a^2 = b^2$. On sait alors trouver les valeurs de K. Nous pouvons poser $\mu^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi$, puisque $\mu$ est compris entre $a$ et $b$ et lorsque $a = b$, ceci est encore la valeur de M ; l'équation qui définit $\mu$

$$B \frac{d}{d\mu}\left(B \frac{dM}{d\mu}\right) - [n(n+1)\mu^2 - K]M = 0,$$

peut s'écrire, en prenant comme variable $\varphi$

$$\sqrt{\mu^2 - c^2} \frac{d}{d\varphi}\left[\sqrt{\mu^2 - c^2} \frac{dM}{d\varphi}\right] - \left[n(n+1)\mu^2 - K\right]M = 0.$$

$$(\mu^2 - c^2) \frac{d^2M}{d\varphi^2} + (b^2 - a^2) \sin\varphi \cos\varphi \frac{dM}{d\varphi}$$
$$- \left[n(n+1)\mu^2 - K\right]M = 0$$

et si on fait $a^2 = b^2$ on trouve l'équation

$$(a^2 - c^2) \frac{d^2M}{d\varphi^2} - \left[n(n+1)a^2 - K\right]M = 0.$$

Cette équation doit avoir comme solutions $\cos p\varphi$ et $\sin p\varphi$, on a donc

$$\frac{K - n(n+1)}{a^2 - c^2} = p^2.$$

L'équation en K a donc $n + 1$ racines réelles, correspondant aux valeurs de $p$,

$$0,\ 1,\ 2, \ldots (n-1), n.$$

On voit que les équations en K ont toutes leurs racines réelles ; les valeurs paires de $p$, séparent les valeurs impaires.

Lorsque $b$ variera de $a$ vers $c$ les racines des équations correspondant aux deux groupes de fonctions de Lamé, contenant zéro et deux radicaux d'une part, sépareront les racines correspondant aux deux autres groupes contenant un ou trois radicaux ; cela ne cessera d'être, que si une des racines d'un groupe d'équations, devenait égale à une racine $\rho$ d'un autre groupe.

Soient, K cette racine, R et S les fonctions de Lamé correspondantes, appartenant par hypothèse à deux groupes différents : on a par hypothèse

$$R'' + (H\rho^2 + K)R = 0,$$
$$S'' + (H\rho^2 + K)\cancel{R}\,S = 0;$$

on en conclut

$$RS'' - S''R = 0.$$

On peut intégrer immédiatement et écrire

$$RS' - S'R = \alpha.$$

Si on suppose R et S exprimés en fonction elliptique du paramètre $u$, on sait que l'on pourra augmenter $u$ de $2\omega_1$, de $2\omega_2$ ou de $2\omega_3$ de façon que R par exemple ne change pas de valeur, et que S change de signe, et de même pour R′ et S′ ; mais alors le produit RS′ — SR′ aurait changé de signe ; on a donc $\alpha = 0$ ; on en conclut que $\frac{R}{S}$ est une constante, ce qui est évidemment faux.

Deux équations en K correspondant à une même valeur de $n$ ne peuvent donc admettre de racine commune.

Remarquons que dans l'équation en K le coefficient du terme de degré le plus élevé se réduit à l'unité ; il est donc impossible que le degré de l'équation s'abaisse.

***Les fonctions de Lamé sont linéairement indépendantes.*** — Je vais démontrer maintenant qu'entre les $p$ fonctions de Lamé, d'une même forme, et pour une valeur de $n$ donnée il n'existe aucune relation linéaire à coefficients constants ; $\left(p \text{ est l'un des nombres } \frac{n}{2}+1, \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

En effet : supposons que l'on puisse avoir une relation de la forme

$$R_{q+1} = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \ldots + \alpha_q R_q, \qquad q < p,$$

en portant $R_{q+1}$ dans l'équation du second ordre, on aura à écrire que les $p$ coefficients d'un polynome seront nuls ; on aura pour déterminer $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_q$. $p + 1$ équations du premier degré, dont la première sera satisfaite identiquement. Il restera donc $p$ équations homogènes à $q$ inconnues. L'élimination de ces inconnues donnera un certain nombre d'équations en K de degré au plus égal à $q$ et ces équations devront être satisfaites pour les $p$ valeurs de K ; ces équations se réduisent alors à des identités. On peut donc déterminer les coefficients $\alpha_1$, $\alpha_2 \ldots$ $\alpha_q$ quel que soit K, et on aurait alors un polynome comme solution de l'équation de Lamé, et cela quel que soit K ; c'est une contradiction.

***Les polynomes de Lamé ont leurs racines réelles.*** — Je vais maintenant démontrer qu'un polynome R quelconque a toutes ses racines réelles et comprises entre $a^2$ et $c^2$.

On peut partager l'intervalle de $-\infty$ à $+\infty$ en quatre autres par les nombres $a^2$, $b^2$ et $c^2$.

Je vais d'abord démontrer que le nombre de racines compris dans chaque intervalle est constant lorsque $b^2$ varie de $a^2$ à $c^2$. En effet, il ne peut en être autrement que si, pour une valeur de $b$, deux racines réelles devenaient imaginaires. Mais alors, pour cette valeur de $b$, ce polynome aurait une racine double : R′ serait nul. On a

$$R'' = FR = 0,$$

F étant $(H^2\rho + K)$ ; on a

$$R''' = FR' + F'R,$$
$$R^{IV} = FR'' + 2F'R' + F''R \text{ etc.};$$

toutes les dérivées seraient nulles, ce qui est impossible.

Il pourrait encore arriver que l'une des racines devienne égale à $a^2$, $b^2$ ou $c^2$. Supposons par exemple qu'une racine devienne égale à $a^2$ : comme on a posé

$$pu - e_1 = \rho^2 - a^2,$$

la valeur de $u$ correspondante serait $\omega_1$, or on a $p'\omega_1 = 0$, $\omega_1$ est un zéro de $p'\omega_2$; donc ce serait un zéro de R′ et l'on revient au cas précédent.

Ceci posé soit $\varepsilon_1$ le nombre des racines imaginaires de l'ensemble des polynomes correspondant à une valeur de $n$;

$\varepsilon_2$, le nombre des racines réelles comprises entre $a^2$ et $b^2$;
$\varepsilon_3$, » » réelles comprises entre $b^2$ et $c^2$;
$\varepsilon_4$, » » réelles non comprises entre $a^2$ et $c^2$.

Le nombre total des racines est égal à la somme des degrés des polynomes

$$\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4.$$

Lorsque $b^2$ est égal à $a^2$, toutes les racines $\varepsilon_2$ se réduisent à $a^2$ et $\varepsilon'_3$ se réduisent à $a^2$ ou à $c^2$; lorsque $b^2$ est égal à $c^2$, toutes les racines $\varepsilon_3$ se réduisent à $c^2$ et $\varepsilon'_2$ se réduisent à $a^2$ ou à $c^2$.

Mais si $a^2 = b^2$ les polynomes sont les dérivées successives de $(v^2-1)^n$ et ils ont toutes leurs racines réelles; il y en a un qui a 0 racine, un qui en a une, un qui en a deux, ... un qui en a $\frac{n}{2}$ abstraction faite des racines $\pm 1$; on a donc

$$\varepsilon_3=\frac{n}{4}\left(\frac{n}{2}+1\right)+\varepsilon'_3;$$

de même on a

$$\varepsilon_2=\frac{n}{4}\left(\frac{n}{2}+1\right)+\varepsilon'_2.$$

Nous avons donc l'égalité

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4=\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)+\varepsilon_1+\varepsilon_4+\varepsilon'_2+\varepsilon'_3;$$

d'où l'on conclut :

$$\varepsilon_1+\varepsilon_4+\varepsilon'_2+\varepsilon'_3=0.$$

et par suite

$$\varepsilon_1=\varepsilon'_2=\varepsilon'_3=\varepsilon_4=0.$$

Le théorème est donc démontré.

Pour savoir maintenant combien il y a de racines dans chacun des intervalles $a^2 \ldots b^2$, $b^2 \ldots c^2$, on voit que dans le cas général il y en a autant que dans le cas particulier, où $a^2 = b^2$.

Et on voit qu'il y a :

un polynome ayant o racine entre $a^2$ et $b^2$, et $\frac{n}{2}$ entre $b^2$ et $c^2$.

» 1 » $\frac{n}{2} - 1$ »

» $\frac{n}{2}$ » 0 »

***Développement d'une fonction en une somme de fonctions de Lamé.*** — Soit un ellipsoïde de la famille, déterminé par le paramètre $\rho$ ; si je pose

$$l = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}},$$

j'ai

$$\int l \mathrm{MN}.\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1 d\sigma = 0.$$

MN désignant un des produits déjà désignés, $\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1$ en désignant un autre, et l'intégrale étant étendue à toute la surface de l'ellipsoïde.

Soit

$$\mathrm{V} = \mathrm{RMN}, \ \mathrm{V}_1 = \mathrm{R}_1\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1.$$

Puisque l'on a $\Delta \mathrm{V} = 0$, la formule de Green donne

$$\int \left(\mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}_1}{dn} - \mathrm{V}_1\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right) d\sigma = 0,$$

l'intégrale étant étendue à une surface fermée quelconque ; supposons que cette surface soit l'ellipsoïde ; R et $\mathrm{R}_1$ sont alors des constantes. Calculons $\frac{d\mathrm{V}}{dn}$ et $\frac{d\mathrm{V}_1}{dn}$ : quand on se déplace sur la

normale à l'ellipsoïde, $\mu$ et $\nu$ demeurent constants, $\rho$ augmente de $d\rho$; et on a

$$\frac{dV}{dn} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dn} = \frac{\partial V}{\partial u}\frac{du}{d\rho}\frac{d\rho}{dn}$$
$$= \frac{\partial V}{\partial u}\frac{du}{dn};$$

mais nous avons

$$\frac{\partial V}{\partial u} = MN\frac{dR}{du};$$

l'intégrale devient donc

$$\int MN.\, M_1N_1\,(RR'_1 - R_1R')\frac{du}{dn}\,d\sigma = 0;$$

mais $RR'_1 - R_1R'$ ne dépend que de $\rho$ et comme c'est une constante, on peut la faire sortir du radical. On a d'ailleurs

$$RR'_1 - R_1R' \neq 0;$$

il vient donc en changeant le signe

$$\int -MNM_1N_1\frac{du}{dn}\,d\sigma = 0.$$

Tout revient à calculer

$$-\frac{du}{dn} = -\frac{du}{d\rho}\frac{d\rho}{dn};$$

nous avons vu que l'on avait, en posant $\rho^2 = pu + h$

$$\rho\frac{d\rho}{du} = \pm\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)},$$

d'où

$$\frac{d\rho}{du} = \pm A;$$

lorsque $\rho$ tend vers l'infini, $pu$ tend vers $\infty$, $u$ tend vers 0, donc décroît ; on doit prendre le signe moins.

On a d'ailleurs, puisque l'élément linéaire est

$$ds^2 = \alpha^2 d\rho^2 + \beta^2 d\mu^2 + \gamma^2 d\nu^2$$

et que $\rho$ seul varie sur la normale :

$$\frac{d\rho}{dn} = \frac{1}{\alpha} = \frac{A\sqrt{(\mu^2 - \nu^2)}}{Q}.$$

On a donc, en posant

$$l = -\frac{du}{dn},$$

$$l = +\frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{Q}$$

$$= \frac{+1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}}.$$

ce qui est l'égalité annoncée. L'intégrale, d'ailleurs, ne dépend pas de $\rho$. Car nous avons

$$d\sigma = \beta\gamma d\mu d\nu;$$

et par suite

$$ld\sigma = \frac{Q^2\sqrt{-1}\, d\mu d\nu}{BC\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}}$$

$$ld\sigma = \frac{(\mu^2 - \nu^2)\sqrt{-1}\, d\mu d\nu}{BC}.$$

On a démontré que toute fonction déterminée sur l'ellipsoïde peut se mettre sous la forme d'une somme de fonctions de Lamé;

$$\Phi = \sum A_k M_k N_k.$$

Le théorème précédent permet facilement de trouver les coefficients. On a

$$\int l\Phi M_k N_k d\sigma = \int \sum A_k l M_k N_k M_i N_i d\sigma;$$

le second membre se réduit à $A_k \int l M_k^2 N_k^2 d\sigma$ : ce qui détermine $A_k$.

***Les fonctions S.*** — Nous allons maintenant considérer une autre fonction de $\rho$ satisfaisant aussi à l'équation de Lamé; nous la définirons ainsi qu'il suit.

Soit R une fonction de Lamé de degré $n$ définie par la relation

$$R'' + FR = 0;$$

la fonction S, associée à la fonction R, sera définie par la relation

$$S'' + FS = 0$$

où F a la même valeur : on en conclut que

$$S''R - R''S = 0;$$

en intégrant on trouve

$$S'R - R'S = C^{te},$$

et nous prenons arbitrairement cette constante égale à $2n + 1$ ; on a donc

$$\frac{S'R - R'S}{R^2} = \frac{2n+1}{R^2}.$$

Donc

$$\frac{S}{R} = \int \frac{2n+1}{R^2}\, du;$$

on peut choisir arbitrairement la limite inférieure d'intégration et on a

$$\frac{S}{R} = \int_0^u \frac{2n+1}{R^2}\, du.$$

Pour $\rho^2$ très grand

$$R = A\rho^n,$$

A étant une constante que nous pouvons prendre égale à l'unité ; $u$ est alors très petit : puisque

$$\rho^2 = pu;$$

$\rho^2$ est approximativement égal à $\frac{1}{u^2}$

$\rho$ » » $\frac{1}{u}$.

On a donc

$$R = u^{-n},$$

$$S = u^{-n} \int_0^u \frac{2n+1}{u^{-2n}} du = u^{n+1};$$

S est donc sensiblement égal à $u^{n+1} = \frac{1}{r^{n+1}}$; le produit SMN satisfait aussi à l'équation de Laplace.

# CHAPITRE VII

## ATTRACTION DES ELLIPSOÏDES

### FIGURES D'ÉQUILIBRE

***Problème de Dirichlet sur l'ellipsoïde.*** — Abordons maintenant le problème de Dirichlet pour un ellipsoïde, dans lequel on se donne, sur un ellipsoïde déterminé par le paramètre $\rho_0$, les valeurs d'une fonction V, en proposant de trouver la fonction V satisfaisant à l'équation de Laplace et prenant sur l'ellipsoïde la série des valeurs données.

Soit sur l'ellipsoïde

$$V = \Phi = \sum A_i M_i N_i;$$

on peut poser

$$A_i = \alpha_i R_i^0 S_i^0,$$

$R_i^0$ étant la valeur pour $\rho = \rho_0$ de la fonction R associée à M et N,
et $S_i^0$ » » $S_i$ » $R_i$.

On a alors

$$\Phi = \sum \alpha_i R_i^0 S_i^0 M_i N_i.$$

Ceci posé, considérons la fonction définie par l'expression

$$\sum \alpha S^0 RMN$$

à l'intérieur de l'ellipsoïde, et

$$\sum \alpha R^0 SMN$$

à l'extérieur du même ellipsoïde.

Ces deux séries sont convergentes dans les espaces indiqués, la fonction est donc bien déterminée.

Calculons les quantités

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} \text{ et } \frac{\partial V}{\partial n_i};$$

on a

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} = \sum \alpha_i R_i^0 S_i' M_i N_i . \frac{du}{dn}.$$
$$= l \sum \alpha_i R_i^0 S_i'^0 M_i N_i.$$

On a de même

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} = - l \sum \alpha_i S_i^0 R_i'^0 M_i N_i.$$

V est une fonction continue quand on traverse la surface, mais ses dérivées ne le sont pas. V est donc le potentiel d'une masse superficielle, dont la densité $\delta$ est déterminée par la relation

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} - \frac{\partial V}{\partial n_i} = - 4\pi\delta.$$

Au lieu de supposer la densité variable, on peut supposer une distribution de densité égale à 1, mais d'une épaisseur $\zeta$, telle que l'on ait

$$\frac{\partial V}{\partial n_e} - \frac{\partial V}{\partial n_i} = - 4\pi\zeta,$$

équation qui détermine $\zeta$, car on a

$$4\pi\zeta = + l \sum \alpha_i (R_i^0 S_i'^0 - R_i'^0 S_i^0) M_i N_i$$
$$= l \sum \alpha (2n+1) MN.$$

Si l'épaisseur de la couche est déterminée par une fonction de la forme

$$\sum l\beta MN,$$

on en déduira réciproquement le potentiel sur la surface par la formule

$$4\pi \sum \frac{\beta}{2n+1} \mathrm{MN};$$

d'où l'on déduit simplement le potentiel à l'intérieur et à l'extérieur de la surface.

***Application.*** — Voyons maintenant les plus simples des fonctions de Lamé.

1° pour $n = 0$ on a

$$\mathrm{R}_0 = \mathrm{M}_0 = \mathrm{N}_0 = 1,$$
$$\mathrm{S} = u.$$

2° pour $n = 1$ on a trois fonctions R

$$\mathrm{R}_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}, \qquad \mathrm{R}_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad \mathrm{R}_3 = \sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

On a

$$x = h_1 \mathrm{R}_1 \mathrm{M}_1 \mathrm{N}_1,$$
$$y = h_2 \mathrm{R}_2 \mathrm{M}_2 \mathrm{N}_2,$$
$$z = h_3 \mathrm{R}_3 \mathrm{M}_3 \mathrm{N}_3,$$

en posant

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}},$$
$$h_2 = \frac{1}{\sqrt{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}},$$
$$h_3 = \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}.$$

3° Pour $n = 2$, on a :
d'abord deux polynomes du second degré

$$\rho^2 - h^2$$

et

$$\rho^2 - h'^2,$$

que l'on peut calculer facilement ; on sait que l'on a

$$a^2 > h^2 > b^2 > h'^2 > c^2,$$

et ensuite les trois fonctions

$$R_4 = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)},$$
$$R_5 = \sqrt{(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - a^2)},$$
$$R_6 = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}.$$

On a

$$R_4 = R_2 R_3,$$
$$R_5 = R_1 R_3,$$
$$R_6 = R_1 R_2;$$

le produit $R_4 M_4 N_4$ est à un facteur constant près $yz$.
» $R_5 M_5 N_5$ » » $zx$.
» $R_6 M_6 N_6$ » » $xy$.

Remarquons encore la signification des fonctions $R_1$, $R_2$, $R_3$, qui sont les demi-axes de l'ellipsoïde correspondant à $\rho$. Son volume est

$$T = \frac{4}{3}\pi R_1 R_2 R_3 = \frac{4}{3}\pi R_1 R_4.$$

Supposons qu'à la surface de l'ellipsoïde, soit répandue une couche de densité constante, et d'épaisseur

$$\zeta = M_0 N_0;$$

le potentiel à la surface sera

$$V = 4\pi R_0^0 S_0^0 M_0 N_0 = 4\pi u_0$$

les indices inférieurs indiquant le numéro d'ordre de la fonction de Lamé, l'indice supérieur indiquant qu'on y fait $\rho = \rho_0$. A l'intérieur, le potentiel sera

$$4\pi S_0^0 R_0 M_0 N_0 = 4\pi u_0,$$

le potentiel sera constant à l'intérieur ; on peut donc considérer la distribution de matière comme la distribution d'une couche électrique en équilibre à la surface de l'ellipsoïde supposé conducteur.

Le potentiel sera à l'extérieur

$$4\pi R_0^0 S_0 M_0 N_0 = 4\pi u.$$

Les surfaces équipotentielles seront donc les surfaces $u = C^{te}$, c'est à dire les surfaces $\rho =$ constante; ce seront des ellipsoïdes homofocaux.

La couche correspondante est celle comprise entre deux ellipsoïdes homofocaux comme le montre la valeur de $\zeta$.

***Attraction d'un ellipsoïde homogène.*** — Considérons (fig. 17) un ellipsoïde homogène dont le potentiel soit V. Déplaçons l'ellipsoïde parallèlement à l'axe $Ox$, d'une quantité $\varepsilon$; le potentiel en un point $(x, y, z)$ va devenir

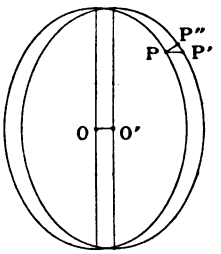

Fig. 17.

$$V'(x-\varepsilon, y, z) = V(x, y, z) - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x},$$

et l'ellipsoïde prendra la position E'. La différence de potentiel provient de ce qu'il y a en plus la région ombrée à droite, et en moins la région ombrée à gauche. On peut supposer que c'est le potentiel d'une épaisseur $\zeta$ répandue à la surface de l'ellipsoïde, $\zeta$ étant positif à droite et négatif à gauche.

Calculons $\zeta$ : si PP'' est la normale commune aux deux ellipsoides, $\zeta =$ PP''; PP' $= \varepsilon$, et le triangle PP'P'' est rectangle en P'', on a donc

$$PP'' = \varepsilon \cos(PP', PP'').$$

Comme

$$PP'' \cos(PP', PP'') = \text{projection de } PP'' \text{ sur } Ox,$$

et, puisque PP'' est normale à l'ellipsoïde $\rho$, on a

$$\begin{aligned}\zeta \cos P &= \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho \\ &= \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dn} dn \\ &= \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dn} \zeta :\end{aligned}$$

de ces égalités on déduit

$$\cos P = \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dn} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dn} = -l\frac{\partial x}{\partial u}.$$

Nous savons aussi que :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = h_1 R_1' M_1 N_1,$$

en posant

$$R_1' = \frac{\partial R_1}{\partial \rho}\frac{d\rho}{du}$$
$$= -A\frac{\rho}{R_1}$$

et comme

$$A = \frac{1}{\rho}\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} = \frac{1}{\rho}R_1R_2R_3 = \frac{1}{\rho}R_1R_4,$$

on en conclut

$$R'_1 = R_4,$$

et l'on a

$$-\frac{\partial x}{\partial u} = h_1 R_4 M_1 N_1.$$

Il vient donc

$$\cos P = h_1 l R_4^0 M_1 N_1,$$
$$\zeta = \varepsilon h_1 l R_4^0 M_1 N_1.$$

On peut donc maintenant déterminer le potentiel V′ relatif à la couche d'épaisseur $\zeta$, en appliquant la formule connue : on a à la surface

$$V' = +\frac{4\pi}{3}\varepsilon h_1 R_4^0 S_1^0 R_1^0 M_1 N_1.$$

A l'intérieur de l'ellipsoïde on a

$$V' = +\frac{4\pi h_1}{3}\varepsilon R_4^0 S_1^0 R_1 M_1 N_1$$

et, puisque $R_1M_1N_1 = x$,

$$V' = +\frac{\varepsilon T x S_1^0}{R_1^0};$$

on a donc

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{T x S_1^0}{R_1^0}.$$

A l'extérieur on a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4\pi h}{3} R_1^0 R_1^0 S_1 M_1 N_1$$
$$= -\frac{T x S_1}{R_1},$$

A l'intérieur $\frac{\partial V}{\partial x}$ est donc proportionnel à $x$, à l'extérieur la relation est plus compliquée; $\frac{\partial V}{\partial x}$ représente la composante de l'attraction parallèle à $Ox$.

***Théorème d'Yvory.*** — Considérons deux ellipsoïdes homofocaux, correspondant, le premier $E_0$ au paramètre $\rho_0$, le second $E_1$ au paramètre $\rho_1$; $\rho_1 > \rho_0$ (fig. 18). Soient $P_1$ et $P_0$ deux points correspondants, c'est à dire ayant respectivement pour coordonnées elliptiques $(\rho_0, \mu, \nu)$ $(\rho_1, \mu, \nu)$. Les coordonnées rectangulaires de deux points correspondants sont proportionnelles, c'est-à-dire que l'on a

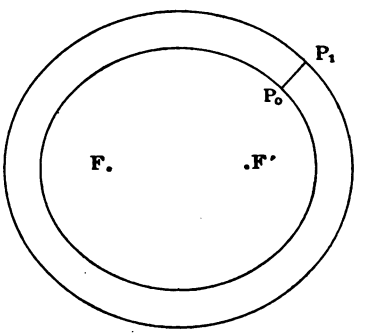

Fig. 18.

$$x_0 = p x_1,$$
$$y_0 = q y_1,$$
$$z_0 = r z_1,$$

$p$, $q$, $r$ étant seulement fonctions de $\rho_0$ et de $\rho_1$.

Le théorème d'Yvory consiste à comparer l'attraction de l'ellip-

soïde $E_1$ sur $P_0$ à l'attraction de l'ellipsoïde $E_0$ sur $P_1$. La première a pour composantes suivant $Ox$

$$-4\pi h R_4^1 S_1^1 R_1^0 M_1 N_1,$$

la seconde a pour composantes suivant $Ox$

$$-4\pi h R_4^0 R_1^0 S_1^1 M_1 N_1,$$

le quotient est donc

$$\frac{R_4^0}{R_4^1} = C^{te};$$

on trouverait de même que les rapports des attractions suivant $Oy$ et $Oz$ sont respectivement

$$\frac{R_5^0}{R_5^1} \quad \text{et} \quad \frac{R_6^0}{R_6^1}.$$

***Ellipsoïde de Mac Laurin.*** — Considérons un ellipsoïde homogène, que nous faisons tourner autour de l'axe $Ox$, d'une rotation infiniment petite $\omega$ ; le point de coordonnées $x$, $y$, $z$, aura pour nouvelles coordonnées

$$x, \quad y + \omega z, \quad z - \omega y;$$

son potentiel sera

$$V(x, y + z\omega, z - y\omega) = V(x, y, z) + \omega\left(z\frac{\partial V}{\partial y} - y\frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

$V' - V$ est le potentiel dû à la couche superficielle comprise entre les deux ellipsoïdes.

Si $(x, y, z)$ représente un point intérieur, l'action en ce point a pour composantes

$$-\frac{TxS_1^0}{R_1^0}, \quad -\frac{TyS_2^0}{R_2^0}, \quad -\frac{TzS_3^0}{R_3^0};$$

elle dérive d'un potentiel

$$V = V_0 - \frac{T}{2}\left(x^2\frac{S_1^c}{R_1^c} + y^2\frac{S_2^c}{R_2^c} + z^2\frac{S_3^c}{R_3^c}\right),$$

en appelant $V_0$ le potentiel au centre ; et cette formule est encore vraie à la surface : donc

$$\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

sont proportionnelles à $y$ et à $z$, et on a

$$\begin{aligned} V' - V &= A\omega yz \\ &= A\omega R_4 M_4 N_4. \end{aligned}$$

En appliquant la formule démontrée précédemment (p. 137), l'épaisseur de la couche en un point est

$$\frac{5A\omega l}{4\pi} \frac{M_4 N_4}{S_4^0}.$$

Pour que l'ellipsoïde puisse être une figure d'équilibre, il faut qu'à la surface on ait

$$V + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2) = C^{te}.$$

Nous allons traiter un problème plus général ; de savoir si un ellipsoïde à trois axes peut être une figure d'équilibre, sachant qu'il est soumis, outre les attractions mutuelles de ses parties, à une force dérivant d'un potentiel

$$\frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2),$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant des constantes.

Pour que l'équilibre ait lieu, il faut que

$$x^2\left(\alpha - \frac{TS_1}{R_1}\right) + y^2\left(\beta - \frac{TS_2}{R_2}\right) + z^2\left(\gamma - \frac{TS_3}{R_3}\right)$$

soit constant à la surface de l'ellipsoïde dont l'équation est :

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} + \frac{z^2}{R_3^2} - 1 = 0.$$

Il faut donc que l'on ait

$$\text{(I)} \qquad \alpha R_1^2 - TS_1R_1 = \beta R_2^2 - TS_2R_2 = \gamma R_3^2 - TS_3R_3.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, c'est-à-dire quand l'ellipsoïde est en rotation, on a, $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \omega^2$, et nos formules deviennent

$$TS_1R_1 = \omega^2 R_2^2 - TS_2R_2 = \omega^2 R_3^2 - TS_3R_3\,;$$

on a donc

$$\text{(II)} \qquad \frac{\omega^2}{T} = \beta\,\frac{R_3S_3 - R_1S_1}{R_3^2} = \beta\,\frac{R_2S_2 - R_1S_1}{R_2^2},$$

et d'ailleurs

$$T = \frac{4\pi}{3} R_1R_2R_3\,;$$

T est une donnée du problème où les inconnues sont $\rho^2 - a^2$, $\rho^2 - b^2$, $\rho^2 - c^2$.

On a une première condition, qui est que $\omega^2$ doit être positif; donc il faut que

$$R_2S_2 - R_1S_1 > 0,$$
$$R_3S_3 - R_1S_1 > 0.$$

Ces inégalités sont toujours vérifiées. Démontrons par exemple que la première l'est, c'est-à-dire que l'on a

$$R_2S_2 - R_1S_1 > 0.$$

Remarquons que $R_1$, $R_2$, $S_1$ et $S_2$ sont des quantités positives, puisque $\rho^2 > a^2$ ; il faut donc que l'on ait

$$\frac{S_2}{S_1} > \frac{R_1}{R_2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{R_2 \displaystyle\int_0^u \frac{du}{R_2^2}}{R_1 \displaystyle\int_0^u \frac{du}{R_1^2}} > \frac{R_1}{R_2},$$

$$\frac{\int_0^u \frac{du}{R_2^2}}{\int_0^u \frac{du}{R_1^2}} > \frac{\frac{1}{R_2^2}}{\frac{1}{R_1^2}},$$

et on est ainsi ramené à un théorème d'arithmétique connu. Le premier rapport est compris entre la plus grande et la plus petite valeur du rapport des quantités placées sous le signe $\int$ : la plus grande de ces valeurs est 1 correspondant à $u = 0$, $\rho = \infty$, la plus petite est $\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - b^2}$ ; le théorème est donc démontré. On en donnera plus loin une démonstration plus générale.

On voit de suite que l'axe de rotation ne peut pas être l'axe $Oy$, car il faudrait que $R_2S_2$ soit la plus grande des trois quantités analogues.

La relation (II) a une solution évidente, c'est $R_2 = R_3$, qui conduit à un ellipsoïde de révolution autour de $Ox$ : c'est l'ellipsoïde de Mac Laurin.

***Ellipsoïde de Jacobi.*** — Les relations (II) peuvent aussi être satisfaites pour un autre ellipsoïde découvert par Jacobi, mais nous devons, avant de le rechercher faire la remarque suivante :

Si nous nous donnons un ellipsoïde homogène quelconque, nous pouvons toujours choisir les constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, de manière à satisfaire aux relations (I) c'est-à-dire de façon que cet ellipsoïde soit en équilibre sous l'action de la gravitation et d'une force supplémentaire dont les composantes sont $\alpha x$, $\beta y$, $\gamma z$ ; nous allons supposer $\alpha = 0$.

La condition d'équilibre d'un ellipsoïde homogène E soumis à la gravitation et à une force perturbatrice dérivant d'un potentiel $\frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2)$ est que, à la surface

$$U = V + \frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2)$$

soit une constante.

Supposons que l'ellipsoïde se déforme mais peu, de façon que la nouvelle surface $\Sigma$ ne diffère pas beaucoup de l'ellipsoïde, et

cherchons à quelle condition $\Sigma$ sera une figure d'équilibre, en continuant à supposer que le fluide reste soumis aux mêmes forces, c'est-à-dire à la gravitation et à la force $\alpha x$, $\beta y$, $\gamma z$.

La condition d'équilibre est que, en désignant par $V + v$ le potentiel dû à la figure $\Sigma$ ;

$$V + v + \frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2)$$

soit une constante à la surface.

Soit $\zeta$ la longueur de la normale comptée de E à $\Sigma$ ; on pourra développer $\zeta$ en une somme de fonctions sphériques :

$$\zeta = + \sum \beta l MN;$$

et l'on aura à la surface

$$v = \sum \frac{4\pi\beta}{2n+1} R^0 S^0 MN.$$

D'autre part, on aura, à des quantités près de l'ordre de $\zeta^2$,

$$U = U_0 + \frac{\partial U}{\partial n}\zeta,$$

et, en appelant $g$ l'intensité de la pesanteur à la surface, il vient

$$g = -\frac{\partial U}{\partial n},$$

d'où

$$U = U_0 - g\zeta.$$

La condition d'équilibre est que U soit une constante et comme

$$U_0 = V + \frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2) = C^{te},$$

$$U = V + v + \frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2) = C^{te};$$

la condition d'équilibre est que

$$v + g\zeta$$

soit une constante à la surface c'est-à-dire que

$$(1)\qquad \sum \frac{4\pi\beta}{2n+1} R^0 S^0 MN - \sum gl\beta MN = C^{te}.$$

Je dis que $gl$ est une constante sur l'ellipsoïde ; en effet, déplaçons l'ellipsoïde parallèlement à l'axe $Ox$, l'équilibre ne sera pas troublé, car par suite de la condition $\alpha = 0$, le travail de la force $(\alpha x, \beta y, \gamma z)$ est nul. Nous avons vu que l'on avait pour $\zeta$ la valeur

$$\zeta = KlM_1N_1,$$

K étant une constante ; l'équation précédente se réduit en ce cas à

$$\frac{4\pi K}{3} R_1^0 S_1^0 M_1 N_1 - glKM_1N_1 = C^{te};$$

ceci ne sera constant que si

$$gl = \frac{4\pi}{3} R_1^0 S_1^0.$$

L'équation (1) devient alors

$$\sum \left( \frac{R^0 S^0}{2n+1} - \frac{R_1^0 S_1^0}{3} \right) \beta MN = C^{te};$$

et l'équation d'équilibre devient, en supprimant l'indice zéro,

$$\frac{R_i S_i}{2n+1} - \frac{R_1 S_1}{3} = 0.$$

Si la masse est en équilibre sous l'action de l'attraction et de la force centrifuge, elle le sera encore si on lui donne un mouvement de rotation. Cette rotation est une des transformations que l'on peut faire subir à un ellipsoïde de Jacobi, sans troubler l'équilibre.

Nous avons vu que dans ce cas, on avait à un facteur constant près (p. 144)

$$\zeta = M_1 N_1;$$

on en conclut que l'ellipsoïde de Jacobi doit satisfaire à la relation

$$\frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_1 S_1}{3}.$$

Réciproquement, supposons qu'un ellipsoïde soit en équilibre sous l'action de l'attraction et d'une force dérivant du potentiel

$$\frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2);$$

je dis que si on peut le faire tourner d'un angle $\omega$ sans troubler l'équilibre, c'est que $\beta = \gamma$.

En effet, à la surface on doit avoir, en appelant V le potentiel newtonien

$$V + \frac{1}{2}(\beta y^2 + \gamma z^2) = V_1 = C^{te};$$

au sommet du petit axe $V = V_1$; si on fait tourner l'ellipsoïde d'un angle $\omega$ autour de $Ox$, le sommet du petit axe restera sur la surface de l'ellipsoïde, la constante $V_1$ n'aura pas changé, V n'aura pas changé non plus.

Or

$$\delta V + \beta y \delta y + \gamma z \delta z = \delta V_1;$$

il faudra donc que sur la surface

$$\beta y \delta y + \gamma z \delta z = 0;$$

et en tenant compte des relations

$$\delta y = \omega z$$
$$\delta z = -\omega y,$$

on devra avoir sur la surface

$$(\beta - \gamma)\,\omega y z = 0;$$

donc

$$\beta = \gamma.$$

***Discussion de l'équation des ellipsoïdes de Jacobi.*** — Nous avons donc à discuter l'équation des ellipsoïdes de Jacobi

$$(1) \qquad \frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_1 S_1}{3}.$$

Cette équation ne convient pas aux ellipsoïdes de révolution, cela provient de la façon dont on a établi cette équation : dans le cas d'un ellipsoïde de révolution, on aurait en effet $\zeta = 0$.

Au lieu de discuter l'équation (1), nous allons discuter l'équation plus générale

$$F = \frac{R_k S_k}{2m+1} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0$$

où l'on a $\rho^2 > a^2$ ; $m$ étant l'ordre de la fonction $R_k$, $n$ étant l'ordre de la fonction $R_i$.

F et $\frac{F}{R_k^3}$ sont de même signe, de plus $R_k$ ne peut pas s'annuler puisque les racines des polynomes R sont comprises entre $a^2$ et $c^2$ ; donc l'équation

$$F_1 = \frac{F}{R_k^2} = \frac{S_k}{(2m+1) R_k} - \frac{S_i}{(2n+1) R_i} \frac{R_i^2}{R_k^2} = 0$$

a les mêmes racines que $F = 0$.

Les racines de l'équation $\frac{F}{R_k^2} = 0$ sont séparées par celles de la dérivée :

$$\frac{dF_1}{du} = \frac{1}{2m+1} \frac{d}{du} \frac{S_k}{R_k} - \frac{1}{2n+1} \frac{R_i^2}{R_k^2} \frac{d}{du} \frac{S_i}{R_i}$$
$$- \frac{1}{2n+1} \frac{S_i}{R_i} \frac{d}{du} \left( \frac{R_i^2}{R_k^2} \right).$$

On a par définition

$$\frac{d}{du} \frac{S_k}{R_k} = \frac{2m+1}{R_k^2};$$

et par suite

$$\frac{dF_1}{du} = -\frac{2}{2n+1}\,\frac{S_i}{R_i}\cdot\frac{R_i}{R_k}\,\frac{R'_iR_k - R_iR'_k}{R_k^2}$$

$$= -\frac{2S_i}{2n+1}\,\frac{R'_iR_k - R_iR'_k}{R_k^3};$$

mais $S_i$ ne peut s'annuler : donc les racines de $\frac{dF_1}{du}$ sont les racines de $R'_iR_k - R_iR'_k$. Nous ne nous occupons évidemment que des racines supérieures à $a^2$.

Cherchons la dérivée de cette fonction par rapport à $u$, c'est :

$$R''_iR_k - R_iR''_k;$$

et, d'après la définition de $R_i$ et $R_k$,

$$R''_i = (H\rho^2 + K)\,R_i,$$

on a

$$R_iR_k\{[n(n+1) - m(m+1)]\,\rho^2 + K_i - K_k\}.$$

Les deux premiers facteurs n'ont pas de racines en $\rho^2$ supérieures à $a^2$; le troisième ne peut évidemment en avoir qu'une seule : donc $\frac{dF_1}{du}$ ne peut en avoir plus de deux, $F_1$ ou F ne peuvent en avoir plus de trois.

Supposons que $\frac{R_i}{R_k}$ soit constamment croissant, sa dérivée ne s'annulera pas; donc $F_1$ sera constamment décroissant et ne pourra avoir qu'une seule racine. Au contraire, si $\frac{R_i}{R_k}$ est toujours décroissant, $F_1$ sera toujours croissant. D'ailleurs pour $u = 0$, $\rho = \infty$, $\frac{R_i S_i}{\cancel{S_i}}$ est à peu près égal à $\frac{1}{\rho}$; donc F part de zéro et est toujours croissant ou toujours décroissant, donc n'a pas de racines, sauf la racine $\rho = \infty$ qui n'est pas admissible.

Dans le cas le plus général, F peut avoir, nous l'avons vu, trois racines : mais parmi celles-là se trouve la racine $\rho = \infty$,

F a donc zéro, une ou deux racines supérieures à $a^2$; si $\frac{R_i}{R_k}$ est toujours croissant ou toujours décroissant, elle n'en a aucune.

Revenons alors à l'équation

$$F = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0.$$

Si $R_i$ contient en facteur $\sqrt{\rho^2 - a^2}$, $\left(\frac{R_i}{R_1}\right)^2$ sera un polynome dont toutes les racines sont réelles et comprises entre $a^2$ et $c^2$; donc la dérivée ne peut s'annuler pour une valeur de $\rho^2$ supérieure à $a^2$. L'équation F n'a pas de racine supérieure à $a^2$. Supposons maintenant que $R_i$ ne soit pas divisible par $\sqrt{\rho^2 - a^2}$, et que $n$ soit plus grand que 1, je dis que l'équation a au moins une racine. En effet, substituons $a^2$, le premier terme s'annule, le second est négatif : on a donc une somme négative ; remplaçons $\rho$ par $\infty$ ; le premier terme de l'équation est à peu près égal à

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right);$$

le résultat est positif; il y a donc un nombre impair de racines entre $a^2$ et $+\infty$, il ne peut y en avoir plus de deux, il y en a donc une et une seule.

Ce raisonnement n'est pas valable si $n = 1$, c'est-à-dire si

$$R_i = R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2},$$

ou bien

$$R_i = R_3 = \sqrt{\rho^2 - c^2},$$

dans ces deux cas, la quantité

$$\frac{R_i^2}{R_1^2} = \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - a^2}$$

et les quantités analogues sont toujours croissantes lorsque $\rho^2$ varie de $\infty$ à $a^2$. Donc l'équation correspondante n'a pas de racines : c'est un théorème déjà énoncé (p. 145).

Appliquons ce principe à l'ellipsoïde de Jacobi. Il faut considérer l'équation

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_3 S_3}{5} = 0;$$

$R_3$ n'est pas divisible par $R_1$ : donc il y a une racine, et une seule.

Donc parmi les ellipsoïdes homofocaux, il y a un ellipsoïde et un seul, qui soit une figure d'équilibre; c'est l'ellipsoïde de Jacobi.

***Figures dérivées de l'ellipsoïde de Mac Laurin.*** — Supposons que $b^2 = c^2$ et cherchons s'il y a des figures peu différentes de l'ellipsoïde de Mac Laurin. Pour qu'il existe une figure d'équilibre $\Sigma$ peu différente de cet ellipsoïde, il faut que l'on ait la condition

$$(1) \qquad \frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2n+1}.$$

Nous avons vu qu'en posant

$$\frac{z}{y} = \operatorname{tg} \varphi,$$

on avait

$$N_i = \cos p\varphi,$$

$$M_i = hF\left(\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{a^2-b^2}}\right),$$

$h$ étant une constante. On a posé

$$F(\xi) = (1-\xi^2)^{\frac{p}{2}} D^{n+p} (1-\xi^2)^n.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) ait une racine est que $R_i$ ne soit pas divisible par $\sqrt{\rho^2 - a^2}$; donc $M_i$ ne doit pas être divisible par $\sqrt{a^2-\mu^2}$, donc $n+p$ doit être pair, $n$ et $p$ étant déterminés, une figure d'équilibre voisine d'un ellipsoïde de révolution est déterminée par la relation :

$$\zeta = \varepsilon\, l M_i \cos p\varphi$$

ou, d'une façon plus générale,

$$\zeta = l M_i (\varepsilon \cos p\varphi + \varepsilon' \sin p\varphi).$$

On peut supposer $\varepsilon' = 0$ : cela revient à faire tourner les axes de coordonnées d'un angle convenable autour de $Ox$. La figure que l'on obtient ainsi est une figure admettant l'axe $Ox$ comme axe de symétrie d'ordre $p$. $F(\xi)$ ne change pas si l'on change $\xi$ en $-\xi$, donc le plan des $yz$ est un plan de symétrie. Si $p = 0$, $\zeta$ ne dépend pas de $\varphi$, la figure est de révolution.

On ne doit pas conserver parmi les équations obtenues celle où $n = 0$, car le volume ne serait pas conservé; de même on doit exclure $n = 1$, car alors $R_i$ serait divisible par $\sqrt{\rho^2 - a^2}$ : donc la valeur minimum de $n$ est 2; à cette valeur de $n$ correspondent deux valeurs de $p$ : $p = 0$, et $p = 2$.

Quelles sont celles de ces figures qui sont ellipsoïdales : considérons un ellipsoïde $E_0$ et un autre $E_1$ qui en soit peu différent mais non homofocal. Le potentiel de chacun d'eux à son intérieur est une fonction du second degré des coordonnées cartésiennes; la différence des potentiels est donc aussi un polynome du second degré : c'est d'ailleurs le potentiel dû à la couche comprise entre les deux ellipsoïdes. On peut par suite développer ce potentiel sous la forme

$$\sum \varepsilon RMN,$$

de Laplace

R, M, N étant des fonctions ~~sphériques~~ d'ordre 0, 1 ou 2.

A la surface on a

$$V = \sum \varepsilon R_0 MN,$$

et à l'extérieur on a par conséquent

$$V = \sum \varepsilon \frac{R_0}{S_0} SMN,$$

l'épaisseur de la couche produisant ce potentiel est donc

$$\zeta = \sum \frac{2n+1}{4\pi} \frac{\varepsilon}{S_0} MN$$
$$= \sum \varepsilon' l MN.$$

Il n'y a que des termes d'ordre 0, 1 ou 2, mais nous avons dit que M ne pouvait être d'ordre 0 ou 1 ; il reste donc $n = 2$ et $p = 0$ ou $p = 2$. Si $p = 0$, la surface considérée est de révolution, c'est un ellipsoïde peu différent du premier ; si $p = 2$, on a un ellipsoïde de Jacobi.

***Variations de $\omega^2$ avec l'aplatissement.*** — Si on fait varier $\rho^2$ de $a^2$ à $+\infty$, l'aplatissement des ellipsoïdes considérés varie de 0 à 1.

Lorsque l'aplatissement est nul $\omega^2 = 0$ ; l'aplatissement croissant, $\omega^2$ va aussi en croissant ; mais il peut avoir des maximums et des minimums ; lorsque l'aplatissement augmente, le moment d'inertie principal augmente aussi.

On a vu que

$$TU_0 = H = W + \frac{\omega^2}{2} J$$

ne pouvait pas dépasser une certaine limite. On a de plus

$$dH = dW + \omega J d\omega + \frac{\omega^2}{2} dJ ;$$

dans une position d'équilibre on a

$$dW + \frac{\omega^2}{2} dJ = 0 ;$$

il en résulte que pour une position d'équilibre on a aussi

$$dH = \omega J d\omega.$$

Lorsque l'aplatissement augmente, J augmente indéfiniment ; donc $\omega$ doit diminuer et tendre vers zéro ; $\omega^2$ part de zéro, revient à zéro, donc a un maximum dans l'intervalle.

Remarque. — Faisons varier $\rho^2$ de $\infty$ à $a^2$. On obtient des ellipsoïdes de plus en plus aplatis : on en rencontrera pour lesquels on aura

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2n+1} ;$$

je dis que la première figure d'équilibre que l'on rencontrera est celle d'un ellipsoïde de Jacobi. En effet, si on suppose que $\frac{R_i}{R_4}$ est toujours décroissant dans l'intervalle considéré, on voit que $\frac{R_4 S_4}{5} - \frac{R_i S_i}{2n+1}$ est toujours positif.

Pour $\rho^2 = \infty$ on a

$$\frac{R_1 S_1}{3} > \frac{R_4 S_4}{5} > \frac{R_i S_i}{2n+1};$$

si $\rho$ décroît, on finira par avoir

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_4 S_4}{5} > \frac{R_i S_i}{2n+1};$$

$\rho$ continuant à décroître, on aura alors

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2n+1};$$

mais on voit que l'on rencontre d'abord un ellipsoïde de Jacobi.

***Figures dérivées de l'ellipsoïde de Jacobi.*** — Il reste à étudier les figures d'équilibre qui diffèrent peu de l'ellipsoïde de Jacobi. Pour cet ellipsoïde on a

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_4 S_4}{5};$$

pour une figure peu différente, on aura

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2n+1},$$

la hauteur de la surface au-dessus de l'ellipsoïde étant

$$\zeta = \varepsilon l M_i N_i.$$

On a donc à considérer les deux équations

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_i S_i}{2n+1}.$$

On a trois inconnues $\rho^2 - a^2$, $\rho^2 - b^2$, $\rho^2 - c^2$; et on a pour le volume qui est donné

$$V = \frac{4\pi}{3}\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}.$$

Pour que l'équation

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_i}{2n+1}$$

ait une racine, il ne faut pas que $R_i$ soit divisible par $R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}$; pour que l'équation

$$\frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_i S_i}{2n+1}$$

ait une racine il faudra que $\frac{R_i}{R_4}$ ne soit pas constamment croissant, $R_i$ a donc comme seules formes possibles les formes suivantes, où P désigne un polynome en $\rho^2$.

$$P,$$
$$P \times \sqrt{\rho^2 - b^2},$$
$$P \times \sqrt{\rho^2 - c^2},$$
$$P \times \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}.$$

Voyons si ces quatre formes sont possibles et rappelons que l'on a $R_4 = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$.

*1er Type.* $R_i$ est un polynome; si $\alpha$ est la plus grande racine de $R_i$ on pourra poser

$$R_i = (\rho^2 - \alpha)\,\Pi_i.$$

$\alpha$ est compris entre $a^2$ et $c^2$ et on a

$$\frac{R_i}{R_4} = \sqrt{\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - b^2}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - c^2}}\,\Pi_i;$$

$\Pi_i$ croît constamment,

$\sqrt{\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - c^2}}$ croît constamment,

$\sqrt{\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - b^2}}$ croît si $\alpha$ est inférieur à $b^2$, décroît dans le cas con-

traire ; il ne faut pas que $\sqrt{\frac{\rho^2-\alpha}{\rho^2-b^2}}$ soit décroissant : donc $\alpha < b^2$ et toutes les racines de $R_i$ sont par suite comprises entre $b^2$ et $c^2$.

Parmi les fonctions de Lamé d'ordre $n$, il y en a une et une seule ayant toutes ses racines comprises entre $b^2$ et $c^2$ ; c'est celle-là que l'on doit prendre pour $R_i$.

*2e Type.* Prenons $R_i = \sqrt{\rho^2-b^2}\, P$ et appelons $\alpha$ la plus grande racine du polynome P ; on a

$$\frac{R_i}{R_4} = \sqrt{\rho^2-\alpha}\sqrt{\frac{\rho^2-\alpha}{\rho^2-c^2}}\,\Pi.$$

Les trois facteurs sont constamment croissants, donc toutes les fonctions de ce type sont à rejeter.

*3e Type.* Posons

$$R_i = \sqrt{\rho^2-c^2}\,(\rho^2-\alpha)\,\Pi.$$

$\Pi$ étant un polynome dont les racines sont inférieures à $\alpha$ ; nous avons

$$\frac{R_i}{R_4} = \sqrt{\rho^2-\alpha^2}\sqrt{\frac{\rho^2-\alpha}{\rho^2-b^2}}\,\Pi.$$

Pour que l'équation puisse avoir une solution, il est nécessaire que $\alpha < b^2$. Donc toutes les racines de P sont comprises entre $b^2$ et $c^2$.

*4e Type.* On voit de même que les fonctions du quatrième type sont telles que $\frac{R_i}{R_4}$ soit un polynome sans racines supérieures à $a^2$, donc il n'y a pas à considérer de fonctions du 4e type.

Donc pour qu'une figure peu différente d'un ellipsoïde de Jacobi soit une figure d'équilibre, il est nécessaire que $R_i$ soit une des fonctions que nous avons appelée $R_{0.n}$. Je dis que cette condition nécessaire est aussi suffisante : en effet, supposons que $b^2$ varie de $c^2$ à $a^2$ ; à chaque valeur de $b^2$ correspond une valeur de $\rho^2$ telle que

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_i S_4}{5};$$

considérons alors la fonction,

$$F = \frac{R_4 S_4}{5} - \frac{R_i S_i}{2n+1};$$

pour $b^2 = c^2$, $\frac{R_i}{R_4}$ est constamment croissant, donc F est positif; si $b^2 = a^2$, la valeur correspondante de $\rho^2$ tend vers $a^2$, alors

$$R_4 = 0,$$

$R_i \neq 0$ puisque $R_i$ ne contient ni $\sqrt{\rho^2 - a^2}$ ni $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, et que toutes ses racines sont comprises entre $b^2$ et $c^2$ : donc

$$F < 0$$

et il y a certainement un système de racines pour les équations considérées.

Nous voyons donc qu'il y a des figures d'équilibre voisines des ellipsoïdes de Jacobi.

Remarque. — Quelle est la première figure d'équilibre que l'on rencontre ? c'est-à-dire, pour quelle valeur de $n$ la valeur correspondante de $\rho$ est-elle maximum ?

Considérons deux fonctions $R_{0,m}$ et $R_{0,n}$,

$$m > n;$$

je dis que

$$\frac{R_{0,m}}{R_{0,n}} = \frac{R_k}{R_i}$$

est constamment croissant; nous allons montrer que la dérivée, prise par rapport à $u$, est constamment positive; cette dérivée est à un facteur positif près

$$R'_k R_i - R_k R'_i,$$

si $R_i$ n'est pas divisible par $\sqrt{\rho^2 - a^2}$, $R'_i$ l'est; et réciproquement. Mais ici $R_i$ et $R_k$ ne sont divisibles ni par $\sqrt{\rho^2 - a^2}$ ni par $\sqrt{\rho^2 - b^2}$; il en résulte que

$$R'_k R_i - R_k R'_i$$

s'annule pour $\rho^2 = a^2$.

Si on exprime $R_i$ et $R_k$ en fonction de l'argument $u$, on a

$$R_i = F(pu),$$
$$R'_i = p'u\, F'[p(u)],$$

et on voit que la dérivée n'a pas de racine supérieure à $a^2$. En effet la dérivée de cette fonction (prise par rapport à $u$) est

$$(R''_k R_i - R_i R''_k) = (\varphi_k - \varphi_i) R_i R_k$$

comme on l'a déjà vu ; $R_i$ et $R_k$ ne peuvent s'annuler, $\varphi_i - \varphi_k$ ne peut s'annuler deux fois, puisque c'est un polynome du premier degré en $\rho^2$. La dérivée ne peut donc s'annuler plus de deux fois pour $a^2 \leqq \rho^2$, c'est-à-dire pour $0 < u \leqq \omega_1$.

La dérivée qui s'annule pour $u = 0$, $u = \omega_1$, ne peut donc s'annuler dans l'intervalle; $\frac{R_k}{R_i}$ est donc constamment croissant lorsque $\rho^2$ varie de $a^2$ à $+\infty$. Il en résulte que l'on a aussi

$$\frac{R_i S_i}{2n+1} > \frac{R_k S_k}{2m+1};$$

lorsque $\rho^2$ varie de $\infty$ à $a^2$, on rencontre donc d'abord une valeur satisfaisant à l'équation

$$\frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_i S_i}{2n+1};$$

puis ensuite la valeur de $\rho^2$ satisfaisant à l'équation

$$\frac{R_4 S_4}{5} = \frac{R_k S_k}{2n+1}.$$

La première des valeurs de $n$ que l'on trouve est donc $n = 1$, puis $n = 2$ : on a déjà examiné ces valeurs ; il faut maintenant examiner la surface voisine de l'ellipsoïde de Jacobi et correspondant à $R_{0,3}$ ; nous allons étudier d'une façon générale la surface correspondant à $R_{0,n}$.

L'épaisseur de la couche sera

$$\zeta = \varepsilon l M_i N_i ;$$

cette épaisseur sera nulle aux points où l'on a

$$M_i N_i = 0,$$

ou bien

$$R_i M_i N_i = 0.$$

Ceci est décomposable en facteurs quadratiques de la forme

$$\frac{x^2}{\alpha^2 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha^2 - c^2} = 1;$$

les $\alpha$ sont d'ailleurs compris entre $b^2$ et $c^2$; les surfaces correspondantes sont donc des hyperboloïdes à deux nappes coupant l'ellipsoïde suivant des lignes de courbures d'un seul système.

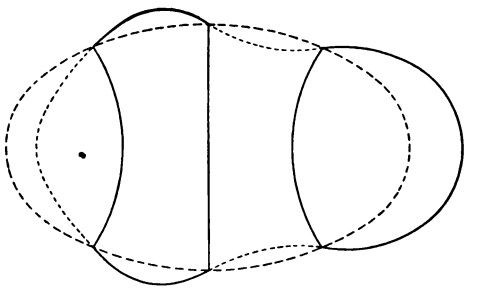

Fig. 19.

D'un côté d'une de ces lignes $\zeta$ sera positif; et de l'autre côté $\zeta$ sera négatif. On peut, avec ces données construire la figure dans l'hypothèse de $n = 3$. On représente (fig. 19) en ponctué le contour apparent de l'ellipsoïde, en traits pleins l'intersection de la surface avec l'ellipsoïde ainsi que le contour apparent extérieur à l'ellipsoïde, en pointillé le contour apparent de la surface intérieure à l'ellipsoïde. L'une des lignes de courbure est d'ailleurs l'ellipse principale, comme on le voit en remarquant que

$$R_{0,3} = \sqrt{\rho^2 - c^2} \times P.$$

On construira avec les mêmes conventions la figure d'équilibre correspondant à $R_{0,4}$ (fig. 20).

Je remarque qu'on ne peut prendre pour les fonctions $R_i$ de fonction du second ordre, car il faudrait prendre pour la fonction $R_{0,2}$ un polynome de la forme $\rho^2 - h^2$, ce qui donnerait un autre ellipsoïde et nous avons vu qu'il ne pouvait y avoir qu'un ellipsoïde de Jacobi pour une vitesse de rotation donnée.

En résumé, si on fait varier $b^2$ de $c^2$ à $a^2$, on obtient des ellipsoïdes à chacun desquels correspond une valeur $\omega$ et une seule; $\omega$ ne peut avoir de maximum ou de minimum, car s'il y en avait un $\omega_1$, à une valeur voisine de $\omega_1$ correspondraient deux figures ellipsoïdales ce qui n'est pas. Donc $\omega$ varie toujours dans le même sens.

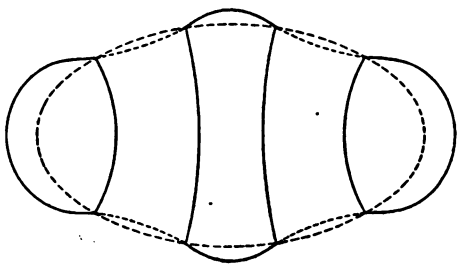

Fig. 20.

Supposons que $b^2$ et $c^2$ tendent vers zéro, la forme de l'ellipsoïde tend alors vers une aiguille allongée; $\omega$ a d'ailleurs la même valeur pour deux ellipsoïdes semblables. Il suffit donc de voir ce qui se passe dans le cas où $b$ et $c$ restant fixes, $a$ augmenterait indéfiniment. On aurait alors un cylindre elliptique, la force résultante de l'attraction du cylindre sur lui-même et de la force centrifuge doit être normale au cylindre, c'est-à-dire parallèle au plan $yOz$. Considérons un point d'une génératrice passant par l'axe de révolution : par raison de symétrie, l'attraction doit être parallèle au plan $yOz$, il en résulte que la force centrifuge qui est perpendiculaire à $Oz$ ne peut être que nulle, et par suite $\omega$ tend vers zéro lorsque $a$ augmente indéfiniment.

On peut d'ailleurs remarquer que le cylindre ne peut être que de révolution pour que l'équilibre soit possible.

## Stabilité des figures trouvées

***Représentation graphique des résultats précédents.*** — Prenons deux axes de coordonnées (fig. 21) et portons en abscisses les valeurs de $\frac{R_2^2}{R_1^2}$ et en ordonnées $\frac{R_3^2}{R_1^2}$; ces quantités sont les rapports de l'axe moyen et du grand axe au petit.

On a un premier point A correspondant au cas où ces rapports sont égaux à 1, la figure correspondante est une sphère. La partie

de la bissectrice de l'angle $xOy$ partant du point A correspond aux ellipsoïdes de révolution. Les ellipsoïdes de Jacobi sont représentés par une courbe CBC′ symétrique par rapport à cette bissectrice et la coupant en un point B.

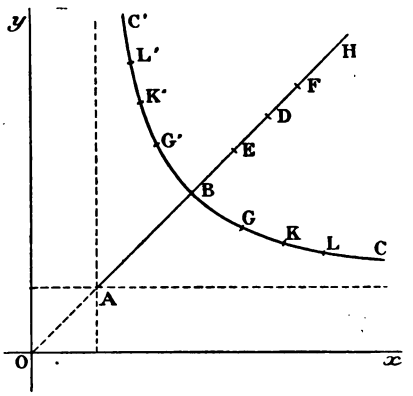

Fig. 21.

Pour les ellipsoïdes de Mac Laurin, $\omega^2$ va en croissant quand on part en croissant du point A, jusqu'à ce que l'on arrive en un point D, puis il décroît quand on s'éloigne du point D jusqu'à l'infini où il arrive à la valeur zéro. Sur la courbe CBC′ deux points symétriques par rapport à AH représentent le même ellipsoïde ayant tourné de 90°; $\omega^2$ décroît quand on part de B pour aller vers C ou vers C′; les points C et C′ s'éloignant indéfiniment correspondent au cas du cylindre de révolution, la courbe CBC′ est asymptote aux droites $x = 1$, $y = 1$.

Nous marquons sur AH les points E, F, correspondant aux figures peu différentes de l'ellipsoïde de révolution, de même sur CBC′, nous remarquons les points GKLM, G′K′L′M′, correspondant aux valeurs $R_{0,n}$ donnant les figures peu différentes d'un ellipsoïde de Jacobi, que nous avons rencontrées précédemment.

Il faut remarquer que les paramètres que nous avons pris ne correspondent pas aux vraies données du problème. Les paramètres sont le volume T, la rotation $\omega$ et le moment principal d'inertie J. Si on pose $\mu = \omega^2 J$, $\mu$ et T sont des données du problème, puisque $\omega^2 J$ doit être constant; $\mu$ est du cinquième ordre par rapport aux longueurs, T est du troisième; si on pose

$$M = \frac{\mu}{T^{\frac{5}{3}}},$$

M sera une donnée du problème indépendante de l'unité de longueur choisie.

Liouville a cherché à quelles valeurs de M correspondaient les divers points des lignes AH et CBC′. Il a montré que lorsqu'on se déplace sur AH, M croît lorsqu'on va de A à D et décroît si on va de D vers H. Sur la ligne CBC′, M décroît lorsqu'on s'éloigne du point B soit vers C, soit vers C′.

Donc si $\omega$ est très grand, il n'y a pas de figure d'équilibre possible; si $\omega$ est compris entre $\omega_B$ et $\omega_D$, il y a deux figures possibles qui sont des ellipsoïdes de révolution.

Si $\omega$ est inférieur à $\omega_B$, il y a quatre figures d'équilibre possible, dont deux sont des ellipsoïdes de Mac Laurin, et deux des ellipsoïdes de Jacobi; ces deux ellipsoïdes de Jacobi sont d'ailleurs égaux comme on l'a déjà remarqué.

***Courbes d'équilibre.*** — Considérons un système dépendant de $n$ variables $x_1 x_2 \dots x_n$, soumis à un système de forces dépendant d'un potentiel $F(x_1 x_2 \dots x_n, \lambda)$; la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre stable est que F soit maximum par rapport aux $x$, $\lambda$ étant donné; on a ici

$$F = W - \frac{\omega^2}{2} J = W - \frac{M^2}{2J}.$$

La condition d'équilibre est que

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0;$$

pour que l'équilibre soit stable, il faut de plus que la forme

$$\Phi = \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} \xi_i^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \xi_i \xi_k$$

soit une forme définie négative; on peut la mettre sous forme d'une somme de $n$ carrés :

$$\Phi = \sum \alpha_k \eta_k^2.$$

Ces coefficients $\alpha_k$ sont appelés coefficients de stabilité; si l'un de ces coefficients s'annule, le discriminant de la forme $\Phi$ s'an-

nule, puisque cette forme est alors réductible à une somme de moins de $n$ carrés; ce déterminant est, en posant

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} = a_{i,k},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Si deux coefficients $\alpha_k$ sont nuls, tous les mineurs du premier ordre de $\Delta$ sont nuls; nous supposerons qu'il n'en est pas ainsi.

Si $\Delta$ est différent de zéro, on peut résoudre les équations

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

et on aura

$$x_i = \psi_i(\lambda).$$

Différentions la relation $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$ par rapport à $\lambda$, on aura

$$\sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_i} \frac{dx_i}{d\lambda} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial \lambda} = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\sum_i a_{1,i} \frac{dx_i}{d\lambda} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial \lambda}.$$

Si $\Delta$ est différent de zéro, on peut trouver les valeurs de $\frac{dx_i}{d\lambda}$, puisque l'on a $n$ équations linéaires à $n$ inconnues et les $x$ seront des fonctions uniformes de $\lambda$, dans le voisinage des valeurs considérées.

Supposons $\Delta$ nul, sans que tous les mineurs du premier ordre le soient, supposons que l'on ait par exemple

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{1,i}} \neq 0.$$

Nous pouvons alors résoudre les $n-1$ dernières équations linéaires par rapport à

$$\frac{dx_2}{d\lambda}, \frac{dx_3}{d\lambda}, \ldots, \frac{dx_n}{d\lambda};$$

ce qui montre que $x_2, x_3, \ldots x_n$ seront fonctions uniformes de $x_1$ et de $\lambda$.

Substituons dans la fonction F les valeurs de $x_2, x_3, \ldots x_n$, en fonction de $x_1$ et $\lambda$ tirées des équations

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 :$$

on aura une fonction $\psi(x_1, \lambda)$, et on a

$$\frac{d\psi}{dx_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1};$$

mais par hypothèse

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

quand on y remplace $x_2 x_3 \ldots x_n$ en fonction de $x_1$ et de $\lambda$ ; on a donc

$$\frac{d\psi}{dx_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1}.$$

La condition d'équilibre est alors que l'on ait

$$\frac{d\psi}{dx_1} = 0.$$

C'est une relation entre $x_1$ et $\lambda$ qui définit une courbe, $x_1$ sera une fonction uniforme de $\lambda$ si $\frac{d^2\psi}{dx_1^2}$ est différent de zéro ; la condition $\Delta = 0$ équivaut donc à $\frac{d^2\psi}{dx_1^2} = 0$.

Supposons que cette condition soit remplie sans que l'on ait en même temps $\frac{d^2\psi}{dx_1 d\lambda} = 0$, la courbe a alors une tangente verticale (fig. 22).

Quand $\lambda$ traverse la valeur de l'abscisse de cette tangente, il y a pour $x_1$ deux valeurs réelles qui viennent se confondre, puis deviennent imaginaires; de même pour $x_2, \ldots x_n$.

Si $\frac{d^2\psi}{dx_1 d\lambda} = 0$, le point correspondant de la courbe est un point double, à tangentes distinctes ou confondues; l'une des tangentes peut être verticale ou non, on a deux dispositions principales : celle qui correspond à deux tangentes distinctes et non verticales (fig. 23) et celle qui correspond à une tangente verticale et une non verticale (fig. 24).

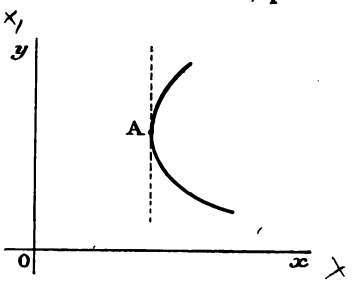

Fig. 22.

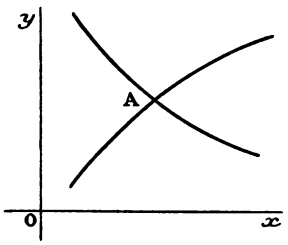

Fig. 23.

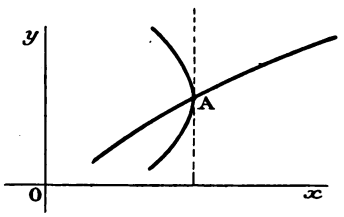

Fig. 24.

On a deux cas à distinguer : dans le premier cas, deux valeurs réelles de $x$ se confondent et redeviennent réelles quand on traverse la valeur correspondant au point double.

Dans le second cas, deux groupes de valeurs réelles se confondent et deviennent ensuite imaginaires lorque $\lambda$ traverse la valeur critique dans un sens convenable, une autre valeur de $x$ est réelle avant et après la valeur critique. Les autres dispositions de figures peuvent se ramener à celles-là, du moins au point de vue qui nous occupe.

***Échange des stabilités.*** — Il y a équilibre stable, avons-nous dit, lorsque F est maximum, $x_1 x_2 \ldots x_n$ étant variables. Il faut *a fortiori* que F soit maximum si $x_1$ étant donné on fait

varier $x_2$, $x_3$, ..., $x_n$ d'une façon arbitraire, il faudra donc que

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_3} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

On tirera $x_2, x_3, \ldots, x_n$ de ces équations dont le déterminant fonctionnel n'est pas nul par hypothèse, on portera ces valeurs dans $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$, et on aura une fonction qui devra être maximum pour qu'il y ait équilibre. Donc $\psi(x_1, \lambda)$ doit être maximum; il y aura donc équilibre si $\frac{d\psi}{dx_1} = 0$, mais il n'y aura équilibre stable que si l'on a en même temps $\frac{d^2\psi}{dx_1^2} < 0$.

Un arc de la courbe $\frac{d\psi}{dx_1} = 0$ partage la région du plan où il se trouve en deux parties, l'une où $\frac{d\psi}{dx_1} > 0$, l'autre où $\frac{d\psi}{dx_1} < 0$; si c'est un arc sans singularité, $\frac{d^2\psi}{dx_1^2}$ ne sera pas nul et sera négatif si la région où $\frac{d\psi}{dx_1}$ est positif est située au-dessous de l'arc de courbe; et au contraire sera positif, si $\frac{d\psi}{dx_1}$ est positif au-dessus de l'arc de courbe considéré. Le premier cas correspond à une position d'équilibre instable.

En couvrant de hachures la région où $\frac{d\psi}{dx_1}$ est positif, on voit que la figure 25 correspond au cas d'un équilibre stable et la figure 26 au cas d'un équilibre instable.

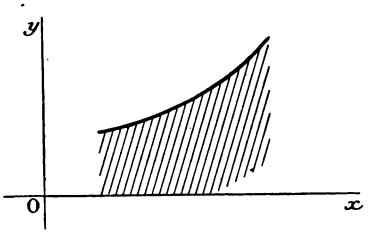


Fig. 25.

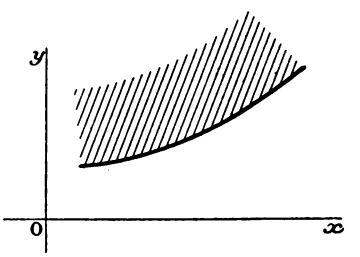


Fig. 26.

Dans le cas où l'arc BAC a une tangente verticale en A, deux cas peuvent se présenter, suivant que c'est la partie convexe ou la partie concave qui est hachurée.

Dans la figure 27 :

l'arc BA correspond à des positions d'équilibre instable,
l'arc AC » » stable ;

dans la figure 28 :

l'arc BA correspond à des positions d'équilibre stable
l'arc AC » » instable.

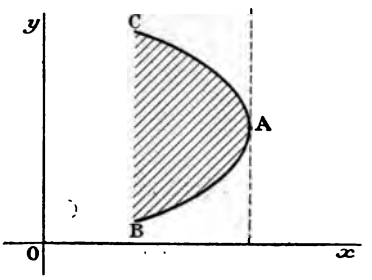


Fig. 27.

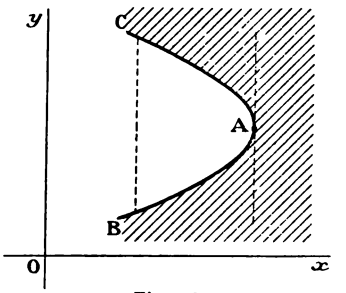


Fig. 28.

Ce qu'il y a d'essentiel, c'est qu'en suivant l'arc et en passant par le point A, les deux systèmes de figures d'équilibre échangent leur stabilité.

Dans le cas d'un point double sans tangente verticale, deux cas peuvent aussi se présenter; dans les figures 29 et 30, les

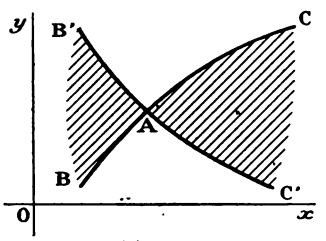


Fig. 29.

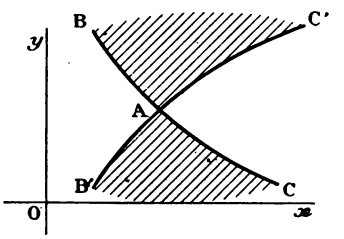


Fig. 30.

arcs BA et AC' correspondent à des figures d'équilibre instable, les arcs B'A et AC correspondent à des figures d'équilibre stable. Remarquons encore qu'en suivant l'arc BAC ou l'arc B'AC' les figures d'équilibre, de stables deviennent instables ou réciproquement.

Enfin dans le cas d'un point double avec une tangente verticale, on arriverait à la même conclusion, les figures d'équilibre

que l'on obtient en suivant un arc quelconque échangeant leur stabilité quand on passe par un point où $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = 0$ (fig. 31 et 32).

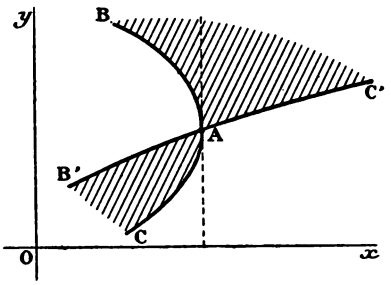


Fig. 31.

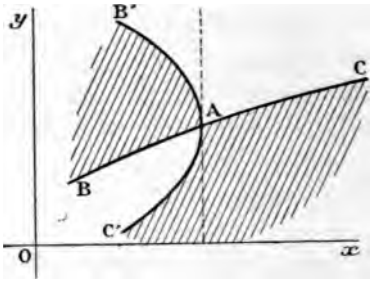


Fig. 32.

***Stabilité de l'équilibre des figures trouvées.*** — Appliquons ceci à notre problème et considérons la figure 21; ce que nous avons appelé $\mu$ représentera ici ce que nous avons appelé $\lambda$ et $\omega$ correspondra à $x_1$.

La fonction F, qu'il faudra rendre maximum est

$$W - \frac{\mu^2}{2J};$$

$\omega^2$ augmente lorsqu'on se déplace de A sur D, et décroît de D à H; sur AH, M va en croissant, et croît aussi de B à C ou à C'.

Il s'agit maintenant de traiter la question de stabilité.

Partons de A, où $\omega = 0$ et où on a une sphère, nous savons que dans ce cas l'équilibre est stable : donc tous les coefficients de stabilité sont négatifs. Ils cesseront d'être tous négatifs quand on rencontrera une figure de bifurcation.

La première bifurcation que l'on rencontrera en suivant AH sera au point B, où l'ellipsoïde de Mac Laurin diffère peu d'un ellipsoïde de Jacobi. Le coefficient de stabilité s'annulera donc en même temps que

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_4 S_4}{5}.$$

Après cela il ne s'annulera plus; quand on arrivera en E, un

autre coefficient s'annulera en changeant de signe, mais le premier coefficient restera positif. Donc de A à B nous avons un équilibre stable, au delà de B il est instable.

Sur la branche BC, on a au contraire des ellipsoïdes qui sont stables jusqu'en G ; en G l'un des coefficients s'annule et au delà reste positif, donc à partir de G sur la ligne BC on aura des positions d'équilibre instable, mais à partir de G commenceront de nouvelles figures d'équilibre et ce sont celles dont il faudra étudier la stabilité ; il y a une difficulté, car, pour ces figures, M peut croître ou décroître.

Il est aisé de voir que l'on a en tous cas un maximum ou un minimum ; on a en effet pour ces figures, si elles correspondent à des formes peu différentes de celle que l'on a en G

$$\zeta = \varepsilon l M_{0,3} N_{0,3} ;$$

en G même, $\varepsilon = 0$. Si on change $\varepsilon$ de signe, la figure a une forme symétrique de la première, M garde donc sa valeur ; il en résulte qu'en G la quantité M passe par un maximum ou un minimum. Si $M < M_G$ on a après une seule figure d'équilibre ; si, au contraire, $M > M_G$ on aurait trois figures d'équilibre dont une est stable. On n'a pas encore fait le calcul complet, bien qu'il semble plus probable que l'on a un minimum.

***Conclusion***. — Quoi qu'il en soit voyons les deux hypothèses : supposons une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation et soumise à un refroidissement assez lent pour qu'il ait le temps de se propager dans la masse ; supposons de plus que le mouvement de rotation soit le même dans toute la masse, et cela en supposant le frottement suffisamment grand.

La vitesse du mouvement de rotation n'est pas constante, ce qui est constant c'est $\mu = \omega^2 J$, en vertu du théorème des aires ; le volume T doit diminuer puisque la masse se refroidit, donc M augmente. On a des figures d'équilibre stable jusqu'en B ; après cela, ce qui devient stable ce sont les ellipsoïdes de Jacobi et cela jusqu'en G ; le refroidissement continuant, on ne peut plus avoir d'ellipsoïdes de Jacobi, puisqu'ils sont instables. Si, pour l'autre série, $M_G$ est un maximum, cette seconde série ne donnera aucune figure, et le corps se dissipera dans l'espace ; si, au contraire,

$M_0$ est un minimum, on aura une sorte d'ovale étranglée que l'étranglement divise en deux parties inégales.

On n'a pas fait le calcul jusqu'au bout pour voir ce qui arriverait ensuite : peut-être l'étranglement s'accentuera-t-il et la masse pourra se diviser en deux parties. Remarquons que ceci ne peut s'appliquer directement à l'hypothèse de Laplace, car la nébuleuse considérée par Laplace n'est pas homogène, elle doit au contraire être fortement condensée au centre.

Quoi qu'il en soit, on ne sait pas jusqu'à présent si en G correspond pour M un maximum ou un minimum.

---

# CHAPITRE VIII

## ANNEAU DE SATURNE

***Etude des figures annulaires d'équilibre.*** — On peut faire trois hypothèses sur l'anneau de Saturne : on peut admettre qu'il est solide, qu'il est fluide ou qu'il est composé d'une masse de solides indépendants ; la troisième hypothèse connue sous le nom d'hypothèse de Cassini paraît être l'hypothèse véritable.

### HYPOTHÈSE DE L'ANNEAU SOLIDE

***Historique.*** — Laplace est le premier qui ait examiné cette hypothèse : et il a remarqué que si l'anneau était homogène son mouvement serait instable ; pour peu que son centre s'écartât du centre de gravité de la planète, l'anneau se précipiterait sur celle-ci ; l'attraction de Saturne ne tendrait qu'à accentuer l'anomalie. Si donc l'anneau est solide il doit présenter des irrégularités ; Laplace ne chercha pas à déterminer l'ordre de grandeur de ces irrégularités ; Maxwell a fait le calcul et a reconnu qu'elles doivent être considérables ; ces irrégularités sont inadmissibles.

***Equations du mouvement.*** — Parmi les forces qui sont appliquées à l'anneau il n'y a pas à s'occuper de l'attraction de l'anneau sur lui-même parce que l'anneau étant solide ses diverses parties n'éprouvent pas de déplacement relatif ; il n'y a donc à s'occuper que de l'attraction de Saturne et de celle des autres corps célestes ; nous négligerons cette dernière action et nous allons nous occuper seulement de l'attraction de Saturne.

Nous allons supposer que l'anneau a son centre de figure au

centre O de la planète : l'observation montre qu'il en est ainsi; le centre de gravité G de l'anneau est supposé différent de O. Un point M de l'anneau, puisque l'on ne parle pas de l'attraction de l'anneau sur lui-même, est soumis à l'action de l'attraction de Saturne ; l'ensemble des forces d'attraction fait donc équilibre à la force d'inertie. Un point M de l'anneau est soumis à l'attraction de Saturne et à la force centrifuge : si l'anneau conserve son centre de figure au même point cette force centrifuge et cette attraction sont constantes : M tournera alors avec une vitesse égale à celle d'un satellite placé à la même distance; c'est la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre. Si l'anneau est homogène, cette condition n'est pas nécessaire, car la vitesse de rotation peut être quelconque : chacun des points de l'anneau serait soumis à la même force, et l'équilibre aurait lieu quelle que soit la vitesse de rotation. Dans le cas général le centre de gravité G décrira donc d'un mouvement uniforme une circonférence autour de Saturne.

Prenons comme unité de longueur le rayon de l'anneau, comme unité de masse la masse de l'anneau ; son moment d'inertie par rapport au centre de figure sera égal à 1. Il reste à déterminer l'unité de temps : on peut la prendre de façon que, en désignant par M la masse de Saturne et par $f$ le coefficient de la gravitation, on ait $fM = 1$.

Étudions le mouvement : soient $x$ et $y$ les coordonnées du centre de gravité, nous avons

$$x \int \rho ds = \int \rho \cos s . ds,$$

$$y \int \rho ds = \int \rho \sin s . ds,$$

en appelant $\rho$ la densité de l'élément linéaire de l'arc $ds$ de l'anneau supposé étroit.

$$\int \rho ds$$

est la masse de l'anneau.

Les équations du mouvement du centre de gravité sont

$$\frac{d^2x}{dt^2}\int \rho\, ds = \int \rho \cos s\, ds = x \int \rho ds,$$

d'où

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = x, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = y. \end{cases}$$

Les intégrales de ces équations sont, en prenant une origine, des temps convenable,

$$\begin{cases} x = \alpha \cos t, \\ y = \beta \sin t. \end{cases}$$

Le point G décrit donc une ellipse dans le cas général ; si c'est une circonférence, elle est décrite avec une vitesse angulaire égale à l'unité : c'est la vitesse d'un satellite placé à l'unité de distance et décrivant un cercle et dans ce cas, $\alpha = \beta$.

***Stabilité du mouvement.*** — Il reste à voir si ce mouvement est stable. Supposant négligeable, par rapport à la masse de Saturne, la masse de l'anneau, nous pouvons supposer Saturne fixe.

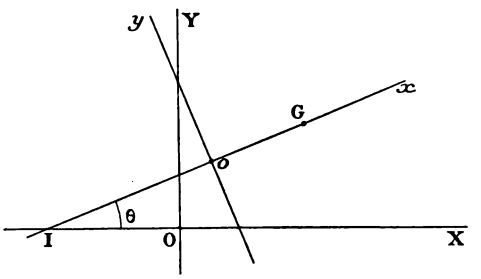

Fig. 33.

Par son centre O, faisons passer deux axes fixes OX et OY (fig. 33) ; par le centre de figure de l'anneau, faisons passer deux axes $ox$, $oy$ invariablement liés à l'anneau, leur position, et par suite celle de l'anneau, sera déterminée, si l'on se donne les coordonnées $x$ et $y$ de O par rapport à $xoy$, et l'angle $\theta$ de l'axe $ox$ avec OX.

Soit G le centre de gravité de l'anneau, qu'on peut supposer

sur $ox$ ; on a $oG = a$, c'est une donnée du problème ; les coordonnées X et Y du centre de gravité sont

$$\begin{cases} X = +y \sin\theta + (a - x)\cos\theta, \\ Y = -y\cos\theta + (a - x)\sin\theta. \end{cases}$$

La force vive de l'anneau est égale à la force vive de translation $\frac{M}{2}(X'^2 + Y'^2)$ augmentée de la force vive de rotation $\frac{J\theta'^2}{2}$. Le moment d'inertie par rapport au point $o$ est donné par la relation $I = J + a^2$. La force vive est donc une fonction de $x$, $y$, $\theta$ et de leurs dérivées et on a

$$X'^2 + Y'^2 = x'^2 + y'^2 + \theta'^2[y^2 + (a - x)^2] - 2\theta'[x'y + (a - x)y'].$$

L'énergie potentielle est

$$U = -fMV,$$

V désignant le potentiel de l'attraction de l'anneau au centre de gravité, et comme on a

$$fM = 1,$$

on a

$$U = -V.$$

Supposons que la densité de l'anneau soit une fonction développable en série de Fourier. Si $d\psi$ est l'angle sous lequel on voit du centre de l'anneau un élément linéaire, on aura, en appelant $\rho$ la densité au point déterminé par l'angle $\psi$,

$$\rho = \rho_0\left[1 + 2\alpha\cos\psi + \frac{2\alpha}{3}\cos 2\psi + \frac{2\beta}{3}\sin 2\psi + \ldots\right];$$

si $\xi$ et $\eta$ sont les coordonnées d'un point de l'anneau par rapport aux axes mobiles, on a

$$\int \rho ds = 1,$$

$$\int \rho\xi ds = a,$$

$$\int \rho\eta ds = 0,$$

$$\int \rho(\xi^2 + \eta^2)\, ds = \int \rho ds = 1.$$

On trouve encore

$$\int \rho(\xi^2 - \eta^2)\, ds = \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\psi\, d\psi = \frac{\alpha}{3},$$

$$\int \rho\xi\eta\, ds = \int_0^{2\pi} \rho \sin 2\psi\, d\psi = \frac{\beta}{3}.$$

Le potentiel en G de l'attraction de Saturne sur l'anneau est, comme on le voit en effectuant le calcul,

$$\int \frac{\rho ds}{r} = V = -U$$

$$= 1 - ax + \frac{x^2 + y^2}{4} + \beta xy + \frac{\alpha}{4}(x^2 - y^2) + \ldots\ldots$$

Les équations de Lagrange donnent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0,$$

mais comme U ne dépend pas de $q'$ on a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T - U)}{\partial q'} - \frac{\partial(T - U)}{\partial q} = 0.$$

On peut écrire

$$T - U = \frac{A\theta'^2 + 2B\theta' + C}{2} + V,$$

où l'on a posé pour abréger

$$A = J + y^2 + (a - x)^2,$$
$$B = -x'y - y'(a - x),$$
$$C = x'^2 + y'^2;$$

remarquons que T — U ne dépend pas de $\theta$ ; la première des équations de Lagrange donne donc :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-U)}{\partial\theta'}\right]=0,$$

et, comme U ne dépend pas de $\theta'$, il reste

$$\frac{dT}{d\theta'}=p,$$

$p$ étant une constante. Il est d'ailleurs facile de calculer cette constante, étant données les conditions initiales ; si on développe l'équation on a

$$A\theta'+B=p.$$

Supposons $x_0=0, y_0=0$, et par suite $x'_0$ et $y'_0$ très petits, on trouve

$$A_0=1,$$
$$B_0=0,$$

et par suite $p=\theta'_0$; donc c'est la vitesse de l'anneau, supposé en équilibre : on a, comme on l'a démontré plus haut, $\theta'_0=1$ ; donc $p=1$ : l'équation obtenue est l'équation des aires.

Transformons maintenant les équations de Lagrange : posons

$$H=T-U-p\theta'.$$

Les équations de Lagrange conserveront la même forme, si on y remplace T — U par H ; car, si $q$ est l'une des variables, on a

$$\frac{\partial H}{\partial q}=\frac{\partial(T-U)}{\partial q}+\frac{\partial T}{\partial\theta'}\frac{\partial\theta'}{\partial q}-p\frac{\partial\theta'}{\partial q},$$

et, comme on a

$$p=\frac{\partial T}{\partial\theta'},$$

on conclut :

$$\frac{\partial H}{\partial q}=\frac{\partial(T-U)}{\partial q}.$$

De même on voit que l'on a

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q'} = \frac{\partial (T - U)}{\partial q'}.$$

On peut faire disparaître $\theta'$ de ces équations, on n'a en effet qu'à remplacer $\theta'$ par

$$\frac{p - B}{A};$$

et comme, ni T ni U ne contiennent $\theta$, $\Pi$ ne sera plus fonction que des deux variables $x$ et $y$, et de leurs dérivées. On trouve

$$\Pi = -\frac{(p - B)^2}{2A} + \frac{C}{2} + V.$$

Supposons maintenant que le centre de l'anneau soit très près de Saturne, c'est-à-dire supposons $x$ et $y$ petits, et voyons si dans le mouvement ultérieur $x$ et $y$ resteront petits.

Les termes de degré zéro qui entrent dans $\Pi$ peuvent être négligés, car ils n'interviennent pas dans les équations de Lagrange. Les termes du premier degré en $x$ et $y$ doivent disparaître d'eux-mêmes : en effet, dans les équations de Lagrange ils donneraient des termes constants, et ces équations doivent admettre la solution $x = 0$, $y = 0$. Quant aux termes du premier degré en $x'$ et $y'$ ils disparaissent dans les équations de Lagrange. Il ne reste donc que les termes du second degré, que nous appellerons W, le reste étant négligeable.

Développons H, en ne conservant que les termes du second degré ; on trouve pour W le développement suivant :

$$Ex^2 + 2Cxy + Fy^2 + \frac{x'^2}{2} + \frac{1 - a^2}{2} y'^2 - x'y + (1 - 2a^2) xy'$$

en posant

$$E = \frac{3}{4} - 2a^2 + \frac{\alpha}{4},$$

$$C = \frac{\beta}{4},$$

$$F = \frac{3}{4} + \frac{\alpha}{4}.$$

Les équations de Lagrange, comme on l'a remarqué, peuvent se réduire à

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'} = \frac{\partial W}{\partial x},$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial y'} = \frac{\partial W}{\partial y};$$

c'est-à-dire

$$x'' - 2(1-a^2)y' = 2Ex + 2Cy,$$
$$(1-a^2)y'' + 2(1-a^2)x' = 2Cx + 2Fy.$$

Ce sont deux équations linéaires à coefficients constants ; pour intégrer on pose

$$x = x_0 e^{i\omega t},$$
$$y = y_0 e^{i\omega t}.$$

On aura quatre valeurs possibles de $\omega$, et l'équation générale du mouvement sera

$$x = l_1 e^{i\omega_1 t} + l_2 e^{i\omega_2 t} + l_3 e^{i\omega_3 t} + l_4 e^{i\omega_4 t},$$
$$y = m_1 e^{i\omega_1 t} + m_2 e^{i\omega_2 t} + m_3 e^{i\omega_3 t} + m_4 e^{i\omega_4 t},$$

les $l$ et les $m$ étant des constantes quelconques déterminées par les conditions initiales. Pour que le mouvement soit stable, quelles que soient ces conditions, il faut que les valeurs de $\omega$ soient à partie réelle négative ou nulle.

Pour déterminer $\omega$, on remplace $x$ et $y$ dans les équations différentielles et on a

$$-\omega^2 x_0 - 2(1-a^2)i\omega y_0 = 2Ex_0 + 2Cy_0,$$
$$-(1-a^2)\omega^2 y_0 + 2(1-a^2)i\omega x_0 = 2Cx_0 + 2Fy_0,$$

on peut éliminer $x$ et $y$ entre ces deux équations, et on trouve

$$\omega^4(1-a^2) + \omega^2\left(-1 + \frac{5a^2}{2} \mp \frac{a^2\alpha}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{4}(9 - \alpha^2 - \beta^2 - 24a^2 + 8a^2\alpha) = 0.$$

L'équation en $\omega^2$ doit avoir ses racines réelles : car si elles étaient imaginaires, les racines carrées de ces deux racines ne

seraient pas des imaginaires pures, et par suite, comme elles sont égales et de signes contraires, l'une serait à partie réelle positive.

Or, pour un anneau homogène, où

$$a = \alpha = \beta = 0,$$

l'équation se réduit à

$$\omega^4 - \omega^2 + \frac{9}{4} = 0;$$

les racines en sont imaginaires : si $a$, $\alpha$, $\beta$ sont voisins de zéro, elles seront encore imaginaires. Il faut donc que $a$, $\alpha$ et $\beta$ soient grands, il y aurait donc de grandes irrégularités dans l'anneau : et sa régularité apparente serait inexplicable.

Maxwell a fait le calcul dans l'hypothèse où l'anneau serait homogène, sauf en un point, où il y aurait une masse supplémentaire : et il a trouvé que cette masse devrait être au moins les $\frac{4}{5}$ de la masse totale de l'anneau, c'est-à-dire que l'on aurait

$$a > 0{,}8.$$

M. Radau a examiné le cas où l'épaisseur de l'anneau serait variable d'un point à un autre, et il a trouvé que la densité devrait varier de 2,7 à 0,04, ce qui ne paraît pas probable.

De plus, la section de l'anneau étant mince, il lui faudrait une grande résistance pour résister à l'attraction des satellites : Hirn a calculé qu'il lui faudrait une résistance mille fois supérieure à celle de l'acier : donc *l'anneau de Saturne n'est pas solide.*

## HYPOTHÈSE DE L'ANNEAU LIQUIDE

***Potentiel d'une circonférence homogène.*** — Cherchons le potentiel d'une circonférence homogène, en un point P de l'espace. Soient PA $= a$, PB $= b$ les distances minima et maxima du point P à la circonférence. La circonférence étant donnée de rayon R, $a$ et $b$ déterminent complètement le potentiel.

Soit $\omega$ l'angle AOM (fig. 34), on a

$$\overline{PM}^2 = a^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} + b^2 \sin^2 \frac{\omega}{2},$$

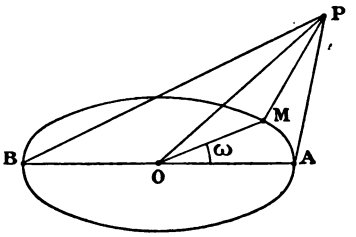


Fig. 34.

le potentiel

$$V_P = \int_0^{2\pi} \frac{\mu R d\omega}{PM}$$

$$= M \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi \times PM}$$

$$= M\varphi(a, b).$$

Comme le potentiel ne dépend que de $a$, de $b$ et de la masse de la circonférence, on peut ramener le calcul de V au potentiel d'une circonférence, en un point de son plan : on décrit une circonférence de diamètre $(a + b)$, et on calcule le potentiel de cette circonférence en un point situé à une distance $a$ d'une des extrémités du diamètre (fig. 35).

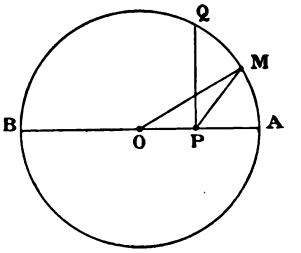


Fig. 35.

Le potentiel en P est le même, on a

$$V = M \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi \sqrt{a^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} + b^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}}};$$

mais on a aussi

$$V = M \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi \sqrt{\overline{OA}^2 \cos^2 \frac{\psi}{2} + \overline{QP}^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}},$$

Q étant le point de la circonférence dont la projection sur le diamètre AB est en P, $\psi$ étant l'angle AOM ; on a donc

$$\varphi(a, b) = \varphi(OA, QP)$$
$$= \varphi\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

Si donc on forme une série de quantités

$$\begin{array}{cc} a & b \\ a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{array}$$

telles que l'on ait

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},$$

$$b_n = \sqrt{a_{n-1}\, b_{n-1}},$$

on aura

$$V = M\varphi(a_n, b_n),$$

et cela quel que soit l'entier $n$. On démontre facilement que $a_n$ et $b_n$ tendent vers une même limite qu'on appelle la moyenne arithmético-géométrique de $a$ et de $b$.

Soit $m$ cette limite, on a

$$V = M\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi\sqrt{m^2\cos^2\frac{\psi}{2} + m^2\sin^2\frac{\psi}{2}}} = M\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{2\pi m} = \frac{M}{m}.$$

$\varphi(a, b)$ est une fonction homogène de $a$ et de $b$, de degré $-1$, c'est-à-dire que l'on a

$$\varphi(\lambda a, \lambda b) = \lambda^{-1}\varphi(a, b);$$

on peut donc écrire

$$\varphi(ab) = \frac{1}{b}\varphi\left(\frac{a}{b}, 1\right)$$

et, remplaçant $\varphi(a, 1)$ par $\varphi(a)$, on a

$$\varphi(a, b) = \frac{1}{b}\varphi\left(\frac{a}{b}\right).$$

Que devient la formule si P est rapproché de la circonférence? $a$ est alors une quantité très petite. On sait que l'on a, en désignant par L le logarithme néperien

$$V = 2\mu_0 L\frac{K}{\rho} + \varepsilon,$$

$\rho$ désignant la distance du point P au point $P_0$ le plus voisin du cercle, $\varepsilon$ étant une quantité tendant vers zéro avec $\rho$, $\mu_0$ et K étant des constantes ne dépendant pas de la position du point P par rapport à $P_0$ non plus que de la position du point $P_0$ sur le cercle.

En reprenant les notations précédentes on a

$$V = 2\mu_0 L \frac{K}{a};$$

et comme

$$M = 2\pi\mu_0 R,$$

on a

$$\frac{V}{M} = \frac{1}{\pi R} L \frac{K}{a};$$

$b$ diffère peu de 2R, à l'ordre d'approximation adoptée ; on a d'ailleurs

$$\frac{V}{M} = \varphi(a, b).$$

Cette relation permet de calculer la constante K : on a en effet

$$\varphi(a, b) = \varphi\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{2}{a+b}\varphi\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right);$$

si on fait $b = 1$ on a

$$\varphi(a) = \frac{2}{1+a}\varphi\left(\frac{2\sqrt{a}}{1+a}\right).$$

Il vient donc dans le cas qui nous occupe, en négligeant $a$ devant l'unité

$$\varphi(a) = 2\varphi(2\sqrt{a});$$

mais on a aussi

$$\varphi(a) = L\frac{K}{a};$$

donc

$$L\left(\frac{K}{a}\right) = 2L\left(\frac{K}{2\sqrt{a}}\right)$$

$$LK - La = 2LK - 2\log 2 - La;$$

d'où on conclut

$$LK = 2\,L\,2,$$
$$K = 4,$$

et finalement

$$\frac{V}{M} = \frac{2}{\pi} L\left(\frac{4}{a}\right),$$

avec l'approximation donnée.

On peut chercher une forme plus exacte pour $\varphi(a)$. Posons

$$\varphi(a) = \frac{2}{\pi}\log\frac{4}{a}\left[1 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots\right] + \frac{2}{\pi}\left[B_0 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots\right];$$

en se servant de la relation

$$\varphi(a) = \frac{2}{1+a}\,\varphi\left(\frac{2\sqrt{a}}{1+a}\right);$$

on trouve facilement que l'on a

$$\begin{cases} A_1 = 0, & B_0 = B_1 = 0, \\ A_2 = \frac{1}{4}, & B_2 = -\frac{1}{4} L\,2, \end{cases}$$

de façon que l'on peut prendre pour $\varphi(a)$ la fonction

$$\frac{2}{\pi}\log\left(\frac{4}{a}\right)$$

et cela en négligeant seulement les termes en $\frac{1}{a^2}$.

***Masse annulaire de révolution.*** — Soit G le centre de gravité de la section méridienne, menons G$y$ parallèle à l'axe de révolution et G$x$ dans le plan méridien, perpendiculaire à G$y$ et tel que le sens positif soit dirigé de l'axe de révolution vers le point G, soit $l$ la distance du point G à cet axe de révolution. Un élément de surface $d\sigma'$ de la section méridienne, de densité $\rho'$ et de coordonnées $x'$ et $y'$ engendre un anneau dont la masse est

$$2\pi\rho'(l + x')\,d\sigma'.$$

Cherchons le potentiel de cet anneau en un point P du plan méridien, dont les coordonnées soient $x$ et $y$ ; il faut d'abord calculer les quantités $a$ et $b$. Si on suppose le point P du même côté de l'axe de révolution que l'élément $d\sigma$, on a

$$a = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$
$$b = \sqrt{(2l + x' + x)^2 + (y - y')^2}.$$

Supposons l'anneau mince et le point P situé près de G, de façon que $x$, $y$, $x'$, $y'$ soient négligeables devant $l$; $a$ est une quantité du même ordre ; on peut prendre pour valeur approchée de $b$

$$2l + x + x'$$

car $(y - y')^2$ est négligeable ; il faut maintenant calculer $\varphi(a, b)$.

On a

$$\varphi(a, b) = \frac{1}{b}\,\varphi\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$= \frac{1}{2l + x + x'}\,\mathrm{L}\,\frac{4b}{a}.$$

Le potentiel en P est donc

$$\mathrm{V} = \frac{4\rho'\,d\sigma'\,(l + x')}{b}\,\mathrm{L}\,\frac{4b}{a}:$$

on a

$$\frac{l + x'}{b} = \frac{l + x'}{2l + x + x'};$$

comme par hypothèse $x$ et $x'$ sont petits, on peut écrire approximativement

$$\frac{l + x'}{b} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{x' - x}{2l}\right].$$

Il vient ensuite

$$\mathrm{L}\,\frac{4b}{a} = \mathrm{L}\,\frac{8l}{a} + \mathrm{L}\,\frac{b}{2l}$$
$$\mathrm{L}\,\frac{b}{2l} = \mathrm{L}\left[1 + \frac{x' + x}{2l}\right];$$

ce qui peut s'écrire, avec le degré d'approximation donné

$$\mathrm{L}\frac{b}{2l} = \frac{x'+x}{2l};$$

on peut alors écrire aussi

$$\mathrm{V} = d\sigma'.2\rho'\left[1+\frac{x'-x}{2l}\right]\left[\mathrm{L}\frac{8l}{a}+\frac{x'+x}{2l}\right].$$

Le potentiel de l'anneau sera donc

$$\int 2\rho'\,\mathrm{L}\frac{8l}{a}\,d\sigma' + \int \frac{x'-x}{l}\rho'\,\mathrm{L}\frac{8l}{a}\,d\sigma' + \int \frac{x-x'}{l}\rho'\,d\sigma',$$

les autres termes étant négligeables, et les intégrales étant étendues à la surface de la section. Nous allons supposer l'anneau homogène et nous écrirons $\rho' = 1$.

Les deux premiers termes sont des potentiels logarithmiques qui jouent, dans l'attraction des masses planes, le même rôle que le potentiel newtonien dans l'attraction des corps célestes ; les propriétés du potentiel logarithmique dans le plan sont analogues à celles du potentiel newtonien dans l'espace : on démontre, par exemple, que le potentiel logarithmique d'un cercle homogène est le même que si toute sa masse était concentrée au centre.

Si le point P est à la surface d'un tore, à une distance $a_0$ du centre du cercle générateur, il suffit de considérer le potentiel logarithmique en P du cercle de rayon $a_0$ ; sa surface est $\pi a_0^2$, Son potentiel est donc

$$\pi a_0^2\,\mathrm{L}\frac{8l}{a_0};$$

la première intégrale est par suite

$$2\pi a_0^2\,\mathrm{L}\frac{8l}{a_0}.$$

La seconde est la somme de deux autres :

$$\int \frac{x'}{l}\,\mathrm{L}\frac{8l}{a}\,d\sigma' - \int \frac{x}{l}\,\mathrm{L}\frac{8l}{a}\,d\sigma,$$

dont la seconde se calcule immédiatement, on trouve pour sa valeur

$$\frac{x}{l}\,\pi a_0^2\,\mathrm{L}\,\frac{8l}{a_0};$$

la première va se calculer plus tard.

On trouve de même

$$\int \frac{x}{l}\,d\sigma' = \frac{x}{l}\int d\sigma' = \frac{x}{l}\,\pi a_0^2,$$

$$\int \frac{x'}{l}\,d\sigma' = \frac{1}{l}\int x' d\sigma' = 0$$

puisque le centre de gravité est à l'origine des coordonnées.
Il reste à calculer

$$\int \frac{x'}{l}\,\mathrm{L}\,\frac{8l}{a}\,d\sigma,$$

nous allons employer un procédé de calcul dont nous nous sommes déjà servi dans une autre question : supposons que la densité du cercle soit

$$\frac{a_0^2}{2} - \frac{x'^2 + y'^2}{2};$$

le potentiel sera

$$\mathrm{U} = \int \rho' d\sigma'\,\mathrm{L}\,\frac{8l}{a};$$

la densité ne dépendant que de la distance au centre, le potentiel logarithmique du cercle est le même que si toute la masse est concentrée au centre. Cette masse est facile à calculer, c'est :

$$\int \frac{a_0^2 - r^2}{2}\,d\sigma' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a_0} \frac{a_0^2 - r^2}{2}\,r dr$$

$$= 2\pi \left[ \frac{a_0^2 r^2}{4} - \frac{r^4}{8} \right]_0^{a_0}$$

$$= \frac{\pi a_0^4}{4}.$$

Le potentiel est donc, en un point A, situé à une distance $a_1$ du centre du cercle $a_1 > a_0$,

$$\frac{\pi a_0^4}{4} \mathrm{L} \frac{8l}{a_1}.$$

Supposons que le cercle C se déplace d'une quantité $\varepsilon$ parallèlement à l'axe des $x$, de façon à occuper la position $C_1$; le potentiel en A sera (fig. 36)

$$U + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial x};$$

la différence de potentiel sera donc

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x}.$$

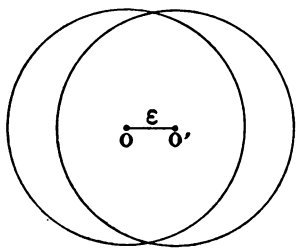

Fig. 36.

Nous allons étudier d'où provient cette différence : en un point de l'intérieur du cercle la densité était $\rho'$, elle est devenue

$$\rho' - \varepsilon \frac{\partial \rho'}{\partial x'}.$$

Dans la région du cercle C′ extérieure au cercle C, la densité était nulle, elle est devenue égale à $\rho'$ qui est petit puisque la densité $\rho'$ est nulle sur la circonférence du cercle C, et l'aire de la région considérée est de l'ordre de $\varepsilon$. Il y a encore à considérer l'aire égale à la précédente, intérieure au cercle C et extérieure au cercle C′, la variation de densité en sens contraire de la précédente est aussi de l'ordre de $\varepsilon$ au plus, puisqu'en un point de cette aire la densité $\rho'$, petite sur le bord du cercle, est devenue nulle.

La variation de potentiel due à ces deux aires est donc négligeable, et on a

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} = - \int \varepsilon \frac{\partial \rho'}{\partial x'} \mathrm{L} \frac{8l}{a} d\sigma'.$$

Or

$$\frac{\partial \rho'}{\partial x'} = -2x' ;$$

il vient donc, en supprimant le facteur $\varepsilon$,

$$\int x' \, \mathrm{L} \, \frac{8l}{a} \, d\sigma' = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}.$$

L'intégrale que nous voulons calculer est donc, au facteur $l$ près, égale à $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}$ ; or $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}$ est la composante de l'attraction suivant $\mathrm{O}x$ ; cette attraction est $\frac{1}{a_1}$, sa composante suivant $\mathrm{O}x$ est $\frac{x}{a_1^2}$.

On a donc

$$\int \frac{x'}{l} \, \mathrm{L} \, \frac{8l}{a} \, d\sigma = \frac{\pi a_0^4 x}{4l} \, \frac{1}{a_1^2};$$

et, si on suppose le point situé sur la surface du tore, c'est-à-dire si l'on a $a_1 = a_0$, il vient pour la valeur de l'intégrale

$$\pi a_0^2 \frac{x}{4l}.$$

On a donc pour le potentiel en un point de la surface du tore

$$\mathrm{V} = 2\pi a_0^2 \, \mathrm{L} \, \frac{8l}{a_0} - \frac{x}{l} \, \pi a_0^2 \, \mathrm{L} \, \frac{8l}{a_0} + \frac{5x}{4l} \, \pi a_0^2,$$

en négligeant les quantités de l'ordre de $\frac{a_0^2}{l^2}$.

***Section méridienne de l'anneau.*** — Si l'on appelle M la masse de Saturne, $\omega$ la vitesse de rotation de l'anneau, une condition nécessaire de l'équilibre est que, à la surface du tore, la fonction $\mathrm{U} + \frac{\omega^2 \mathrm{R}^2}{2}$ soit une constante, U représentant le potentiel de l'anneau sur lui-même augmenté du potentiel de

Saturne, ce dernier peut être représenté, avec l'approximation employée, par $\frac{M}{l}$ et l'on doit avoir à la surface de l'anneau :

$$V + \frac{M}{l} + \frac{\omega^2 R^2}{2} = C^{te}.$$

En posant

$$R = l + x,$$
$$R^2 = l^2 + 2lx;$$

la distance d'un point de la surface au centre du tore est

$$\rho^2 = (l+x)^2 + y^2,$$

ce qui, avec l'approximation que l'on cherche, peut s'écrire

$$\rho^2 = (l+x)^2,$$

d'où

$$\rho = l + x;$$

enfin on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{l+x} = \frac{1}{l} - \frac{x}{l^2}.$$

La condition d'équilibre peut s'écrire

$$2\pi a_0^2 \, L \frac{8l}{a_0} - \frac{x}{l} \pi a_0^2 \, L \frac{8l}{a_0} + \frac{5x}{4l} \pi a_0^2$$
$$+ \frac{M}{l} - \frac{Mx}{l^2} + \frac{\omega^2 l^2}{2} + \omega^2 l x = C^{te};$$

il faut donc que le coefficient de $x$ soit nul, ce qui donne

$$\frac{5\pi a_0^2}{4l} - \frac{\pi a_0^2}{l} L \frac{8l}{a} - \frac{M}{l^2} + \omega^2 l = 0.$$

Cette équation donne $\omega^2$, aux quantités du deuxième ordre près.

Comme $\frac{a_0^2}{l}$ est aussi petit, on a

$$\omega^2 = \frac{M}{l^3}.$$

La vitesse de rotation d'un tore engendré par un cercle, de rayon suffisamment petit par rapport à sa distance de Saturne, est donc la même que celle d'un satellite placé à la même distance.

S'il n'y a pas de corps central, $M = 0$ : on voit alors qu'en l'absence de corps central il peut y avoir une figure annulaire d'équilibre : $a^2$ est alors très petit, mais le rapport $\frac{\omega}{\frac{a_0}{l}}$ tend vers l'infini quand $a_0$ tend vers zéro, car $L \frac{l}{a_0}$ augmente alors indéfiniment.

Si on voulait pousser plus loin l'approximation, il faudrait calculer les termes de la forme de

$$x^m y^n \int x'^{m'} y'^{n'} L \frac{8l}{a} d\sigma,$$

et

$$x^m y^n \int x'^{m'} y'^{n'} d\sigma'.$$

Supposons maintenant que le tore ait une section elliptique ; nous devons alors calculer le potentiel logarithmique d'une ellipse. Or le potentiel newtonien d'une droite indéfinie en un point, est le potentiel logarithmique en ce point de la projection du point sur la droite ; il en résulte que le potentiel logarithmique d'une ellipse en un point de son plan est le potentiel newtonien d'un cylindre long par rapport à sa section droite, en un point situé à une petite distance de sa surface. On est donc amené à calculer le potentiel d'un ellipsoïde très allongé pour lequel on supposerait $c^2$ infini.

Le potentiel intérieur est donc une fonction du second degré

$$V = Ax^2 + By^2$$

dont les coefficients sont faciles à calculer (page 140).

Pour le potentiel extérieur on a

$$V = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 y^2 + \ldots$$

On peut calculer $A_0$, $A_1$, $A_2$ comme on l'a fait précédemment, mais les intégrales devront être étendues à la surface d'une ellipse dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Les quantités du troisième ordre sont négligeables. La fonction de force peut de même se développer en série de la forme

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 y^2.$$

La condition d'équilibre est que l'on ait

$$(A_1 + C_1)x + (A_2 + C_2)x^2 + (A_3 + C_3)y^2 = C^{te}$$

à la surface de l'ellipse; il faut donc que l'on ait

$$A_1 + C_1 = 0$$
$$(A_2 + C_2)a^2 = (A_3 + C_3)b^2.$$

Laplace avait fait le calcul, et a discuté l'équation mais sans tenir compte des termes en $A_2$ et $A_3$.

M^me^ de Kowalewski a été plus loin et a fait voir que la section méridienne du tore n'était pas symétrique par rapport à l'axe des $y$.

Nous étudierons plus tard la question de la stabilité; nous allons d'abord discuter l'hypothèse de Cassini.

## HYPOTHÈSE DE CASSINI

***Vraisemblance de l'hypothèse.*** — Cette hypothèse est la seule compatible avec les travaux de Maxwell sur l'anneau de Saturne. L'observation confirme cette hypothèse, car l'anneau est transparent et la lumière le traverse sans trace de réfraction ; il faut donc supposer qu'il est composé de corpuscules solides (ou liquides), isolées les unes des autres. Les observations spectroscopiques montrent d'ailleurs que la vitesse d'une molécule de l'anneau n'est pas la même sur le bord interne, ou sur le bord externe.

***Equations du mouvement*** — Nous allons commencer par étudier un cas très simple : nous allons considérer $p$ satellites de même masse $\mu$, équidistants sur un cercle : la distance de deux satellites sur ce cercle sera $\frac{2\pi}{p} = 2\delta$; le rapport $\frac{\mu}{\delta}$ n'est pas infiniment grand.

Un mouvement possible du système est celui où chaque satellite parcourrait le cercle d'un mouvement uniforme, avec une vitesse $\omega$, déterminée par l'attraction de la planète, augmentée d'un terme où il faudrait tenir compte de la masse des autres satellites ; et nous allons chercher s'il y a un mouvement peu différent de celui-là.

Soit $M_k$ le satellite de rang $k$, son rayon vecteur sera $1 + \rho_k$, son angle polaire sera $\omega t + 2k\delta + \sigma_k$ : dans le mouvement non troublé on aurait

$$\rho_k = 0,$$
$$\sigma_k = 0 ;$$

si le mouvement est stable $\rho_k$ doit rester petit.

La force vive T, et la fonction de forces U, sont fonctions de $\rho_k$ et de $\sigma_k$ ; les équations de Lagrange donnent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \sigma'_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial \sigma_k} + \frac{\partial U}{\partial \sigma_k} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \rho'_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial \rho_k} + \frac{\partial U}{\partial \rho_k} = 0 ;$$

en posant

$$T - U = H,$$

on a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \rho'_k} - \frac{\partial H}{\partial \rho} = 0.$$

Nous pouvons supposer que Saturne est fixe, c'est-à-dire que nous négligerons les perturbations apportées dans le mouvement de Saturne par celui des satellites ; la mise en équation du problème est alors indépendante du mouvement de Saturne.

La force vive du système est

$$T = \sum \frac{\mu}{2}\left[\rho'^2_k + (1+\rho_k)^2(\omega+\sigma'_k)^2\right],$$

et, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre :

$$T = \sum \frac{\mu}{2}\left[\rho_k'^2 + \omega^2 + 2\omega^2\rho_k + \omega^2\rho_k^2 + 2\omega\sigma_k'^2 + \sigma_k'^2 + 4\rho'_k\,\sigma'_k\right].$$

La fonction de forces est

$$U = \sum \frac{\mu}{(1+\rho_k)} + \mu^2 R;$$

R représentant la partie complémentaire du potentiel due à l'attraction des satellites les uns sur les autres ; si l'on pose :

$$\psi = (k-h)\,\theta,$$

on a

$$R = \sum \frac{1}{2\sin\psi}\left\{1 - \frac{\rho_h+\rho_k}{2} + \frac{(\rho_h+\rho_k)^2}{4} - \frac{(\rho_h-\rho_k)^2}{8}\cot g^2\psi \right.$$
$$+ (\rho_h+\rho_k)\frac{\sigma_h-\sigma_k}{4}\cot g\psi + \frac{(\sigma_k-\sigma_h)}{2}\cot g\psi$$
$$\left. + \frac{(\sigma_k-\sigma_h)^2}{8}(1+2\cot g^2\psi) + \ldots\right\},$$

les termes non écrits étant négligeables. On peut écrire aussi

$$\frac{\mu}{1+\rho_k} = \mu(1-\rho_k+\rho_k^2).$$

Les termes les plus importants de R sont évidemment ceux pour lesquels $\psi$ est petit, $\sin\psi$ étant un infiniment petit du premier ordre, $\frac{\cot g\psi}{\sin\psi}$ est un infiniment grand du second, et $\frac{\cot g^2\psi}{\sin\psi}$ est un infiniment grand du troisième.

U et T comme on le voit ne dépendent pas de $t$, et sont du second degré par rapport à $\rho, \rho', \sigma$ et $\sigma'$; $\frac{\partial T}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial T}{\partial \sigma'}$ sont du premier

degré par rapport à ces quantités ; enfin $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \sigma'}\right)$ est du premier degré avec des dérivées du second ordre. Les équations de Lagrange sont donc des équations à coefficients constants de la forme

$$A + B(\rho, \rho', \rho''; \sigma, \sigma', \sigma'') = 0.$$

A étant une constante, et B étant une fonction linéaire des arguments ; mais ces équations doivent admettre la solution $\rho = \sigma = 0$ ; il faut donc que A disparaisse de lui-même ; les équations sont alors des équations linéaires et homogènes, qui s'intègrent par les exponentielles, et on a,

$$\rho = \sum \alpha e^{\lambda t},$$

les $\lambda$ étant des racines d'équations algébriques, et les $\alpha$ étant des constantes.

Le mouvement sera stable si $\rho$ ne croît pas au delà de toute limite ; en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire de $\lambda$, on a

$$\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1 ;$$

le mouvement sera stable si $\lambda_0$ est négatif ou nul ; mais si nous démontrons que l'équation en $\lambda$ a ses racines deux à deux égales et de signes contraires, nous verrons que $\lambda_0$ ne peut être que nul. Or si nous changeons $t$ en $-t$ les équations ne changent pas, puisque les termes du second ordre seuls interviennent dans les équations de Lagrange ; il en résulte que si l'équation en $\lambda$ admet une racine, elle admettra aussi la racine de signe contraire, et par suite, la condition nécessaire de la stabilité de l'équilibre, est que les racines de l'équation en $\lambda$ soient purement imaginaires. La condition est d'ailleurs évidemment suffisante puisque, dans ces conditions, $\rho$ s'exprime par des fonctions trigonométriques de la variable réelle $t$.

Vous avons $2p$ équations du second ordre, donc $\lambda$ satisfait à une équation algébrique d'ordre $4p$ ; c'est une équation en $\lambda^2$, de degré $2p$ dont toutes les racines sont réelles et négatives.

Les premières des équations de Lagrange sont

$$\rho_k'' - \omega^2(1+\rho_k) - 2\omega\sigma_k' + 1 - 2\rho_k = \mu\left(\frac{\partial R}{\partial \rho_k}\right);$$

on peut écrire, en mettant en évidence dans R les termes de degrés 0, 1 et 2

$$R = R_0 + R_1 + R_2;$$

et l'on a

$$\mu\frac{\partial R}{\partial \rho_k} = \mu\frac{\partial R_1}{\partial \rho_k} + \mu\frac{\partial R_2}{\partial \rho_k},$$

$\frac{\partial R_1}{\partial \rho_k}$ est une constante, $\frac{\partial R_2}{\partial \rho_k}$ est une fonction linéaire.

Les secondes équations sont

$$\sigma_k'' + 2\omega\rho_k' = \mu\frac{\partial R_1}{\partial \sigma_k} + \mu\frac{\partial R_2}{\partial \sigma_k}.$$

Dans la première équation les termes constants doivent disparaître : on a donc

$$\omega^2 - 1 = -\mu\frac{\partial R_1}{\partial \rho_k}$$
$$= -\frac{\mu}{4}\sum\frac{1}{\sin\psi},$$

$\psi$ prend les valeurs $\theta$, $2\theta$, $3\theta$, ..., $(\overline{p-1})\theta$. Dans le cas ou $\mu = 0$ on aurait $\omega^2 = 1$.

Les équations sont donc

$$\rho_k'' - 2\omega\sigma_k' - (\omega^2+2)\rho_k = \mu\frac{\partial R_2}{\partial \rho_k},$$
$$\sigma_k'' - 2\omega\rho_k' = \mu\frac{\partial R}{\partial \sigma_k}.$$

***Changement de variables.*** — Faisons le changement de variables,

$$\rho_k = \sum \xi_\gamma e^{2ik\gamma\theta}, \qquad \gamma = 1, 2, \ldots, p.$$

On a par exemple

$$\rho_1 = \xi_1 e^{2i\theta} + \xi_2^{4i\theta} + \xi_3 e^{6i\theta} + \ldots,$$
$$\rho_2 = \xi_1 e^{4i\theta} + \xi_2 e^{8i\theta} + \xi_3 e^{12i\theta} + \ldots.$$

Posons de même

$$\sigma_k = \sum \eta_\gamma e^{2ik\gamma\theta}.$$

Les $\xi_\gamma$ d'une part et les $\eta_\gamma$ de l'autre sont deux à deux imaginaires conjuguées ; d'une façon plus précise je dis que $\xi_\gamma$ et $\xi_{p-\gamma}$ sont imaginaires conjuguées. En effet, on peut écrire

$$\rho_k = \sum \xi_{p-\gamma} e^{2ik(p-\gamma)\theta} = \sum \xi_{p-\gamma} e^{-2ik\gamma\theta}.$$

Cette seconde valeur de $\rho_k$ se déduit de la première en changeant $i$ en $-i$ et $\xi_\gamma$ en $\xi_{p-\gamma}$ : il faut donc que $\xi_{p-\gamma}$ se déduise de $\xi_\gamma$ par le changement de $i$ en $-i$ ; donc $\xi_\gamma$ et $\xi_{p-\gamma}$ sont imaginaires conjugués. On démontrerait de même que $\eta_\gamma$ et $\eta_{p-\gamma}$ sont imaginaires conjugués. Si $p$ est pair, $\xi_{\frac{p}{2}}$ est réel, car il est à lui-même son imaginaire conjugué.

$\left(\frac{d\rho_k}{dt}\right)^2$ sera un polynome du second degré en $\xi'_\gamma$, qui ne renfermera d'ailleurs que les termes de la forme $\xi'_\gamma \xi'_{p-\gamma}$. En effet, T et R sont symétriques par rapport aux $\rho_k$ et aux $\sigma_k$ ; si l'on permute circulairement les $\rho_k$ d'une part et les $\sigma_k$ d'autre part, c'est-à-dire si l'on remplace $\xi_\gamma$ par $\xi_\gamma e^{2i\gamma\theta}$, $\xi'_\gamma$ est multiplié par le même facteur.

De même pour $\eta_\gamma$ et $\eta'_\gamma$. Par ce changement ni T ni R ne doivent être modifiés : il faut donc qu'un terme $\xi'_\gamma \xi'_{\gamma'}$ se transforme en lui-même ; donc il faut que le changement de variable multiplie ce facteur par $e^{2ihp\theta}$ ; il faut donc que

$$2i(\gamma + \gamma')\theta = 2ihp ;$$

donc

$$\gamma + \gamma' = p.$$

En appliquant toujours le même raisonnement, on voit qu'en définitive T et R ne doivent contenir que des termes de la forme

$$\begin{array}{ll} \xi'_\gamma \xi'_{p-\gamma} & \eta'_\gamma \eta'_{p-\gamma} \\ \xi_\gamma \xi'_{p-\gamma} & \xi_\gamma \eta'_{p-\gamma} \\ \xi_\gamma \xi_{p-\gamma} & \xi_\gamma \eta_{p-\gamma} \\ \xi'_\gamma \eta_{p-\gamma} & \eta_\gamma \eta_{p-\gamma} \end{array}$$

Si maintenant on regarde de plus près la formation de la fonction H, on voit que l'on peut poser

$$H = H_1 + H_2 + \ldots + H_\gamma + \ldots + H_p$$

en écrivant $H_\gamma$ à la place de

$$\xi'_\gamma \xi'_{p-\gamma} + 2\omega(\xi_\gamma \eta'_{p-\gamma} + \xi_{p-\gamma}\eta'_\gamma) + \omega^2 \xi_\gamma \xi_{p-\gamma} + \eta'_\gamma \eta'_{p-\gamma} + 2\xi'_\gamma \xi_{p-\gamma}$$
$$+ \mu \left[ -L_\gamma \xi_\gamma \xi_{p-\gamma} + M_\gamma (\xi_\gamma \eta_{p-\gamma} + \eta_\gamma \xi_{p-\gamma}) + N_\gamma \eta_\gamma \eta_{p-\gamma} \right].$$

L, M, N sont donnés par les formules

$$L_\gamma = \sum \left( \frac{\sin^2 \gamma\psi \cos^2 \psi}{4 \sin^3 \psi} - \frac{\cos^2 \gamma\psi}{2 \sin \psi} \right),$$
$$M_\gamma = \sum \frac{\sin 2\gamma\psi \cos \psi}{8 \sin^2 \psi},$$
$$N_\gamma = \sum \left( \frac{\sin^2 \gamma\psi \cos^2 \psi}{2 \sin^3 \psi} + \frac{\sin^2 \gamma\psi}{4 \sin \psi} \right).$$

Les équations de Lagrange seront alors

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H_\gamma}{\partial \xi'_\gamma}\right) - \frac{\partial H_\gamma}{\partial \xi_\gamma} = 0,$$

et on aura en supprimant les indices

$$\begin{aligned} \xi'' - \xi(\omega^2 + 2) - 2\omega\eta' &= \mu\,[L\xi + M\eta], \\ \eta'' + 2\omega\xi' \qquad\qquad &= \mu\,[M\xi + N\eta]. \end{aligned}$$

L'équation en $\lambda$ est

$$(\lambda^2 - \omega^2 - 2 - L\mu)(\lambda^2 + N\mu) - (\mu^2 M^2 - 4\omega^2\lambda^2) = 0.$$

***Discussion des équations.*** — Quel que soit $\gamma$, les racines de cette équation en $\lambda^2$ doivent être réelles et négatives ; on voit que cette condition sera remplie si $\mu$ est suffisamment petit ; Maxwell a démontré qu'il fallait que l'on eût $\mu < \frac{2,3}{p^3}$. Dans ces conditions $\mu p$ tend vers zéro quand $p$ augmente indéfiniment ; c'est là une difficulté, car la masse de l'anneau précisément égale à $\mu p$, serait négligeable ; mais cette difficulté disparaît d'elle-même si on suppose les satellites répartis non sur une circonférence, mais dans un certain volume.

Si les racines de l'équation en $\lambda^2$ sont négatives, on pourra poser

$$\xi_\gamma = Ae^{\lambda t} = Ae^{int},$$

$n$ étant une quantité réelle, et en prenant

$$A = A_0 e^{in\varphi},$$
$$B = B_0 e^{ni\varphi_1},$$

on aura

$$\xi_\gamma = A_0 e^{nit + i\varphi},$$
$$\eta_\gamma = B_0 e^{nit + i\varphi_1}.$$

On aura une solution particulière si à $\xi_\gamma$ $\eta_\gamma$ on ajoute les solutions,

$$\xi_\beta = 0,$$
$$\eta_\beta = 0.$$
$$\beta \neq \gamma$$

et on aura alors une solution particulière pour les $\rho_k$ en posant

$$\rho_k = A_0 e^{i(nt + \beta + 2k\gamma\theta)};$$

à cette solution on peut ajouter la solution imaginaire conjuguée ; on obtiendra ainsi des solutions de la forme

$$\rho_k = A_0 \cos(nt + \varphi + 2k\gamma\theta),$$
$$\sigma_k = B_0 \cos(nt + \varphi + 2k\gamma\theta).$$

Si on suppose un système d'axes entraînés constamment avec le satellite $M_k$ dans son mouvement non troublé, et tel que l'un d'eux

coïncide avec le rayon $OM_k$, $\rho_k$ et $\sigma_k$ seront les coordonnées du satellite, par rapport à ces axes, et on voit que le satellite décrit par rapport à eux une petite ellipse.

On passe de la trajectoire d'un satellite à celle du suivant en changeant $k$ en $k+1$ ; le second satellite est donc en retard sur le premier, et ainsi de suite ; il y a ce que l'on appelle un décalage égal à $\gamma\theta$. Si $k\gamma\theta$ est un multiple de $2\pi$ le satellite de rang $k+1$ sera dans la même position que le premier satellite ; celui du rang $k+2$ dans la même position que le second et ainsi de suite.

Le mouvement sera comme s'il se transmettait d'un satellite à l'autre avec un certain retard ; on peut aussi dire que le mouvement se transmet comme une onde, dont la longueur serait $\frac{2\pi}{\gamma}$.

Les ondes qui sont les plus dangereuses pour la stabilité sont les ondes courtes ; les ondes qui compromettent le plus la stabilité sont donc celles qui correspondent aux grandes valeurs de $\gamma$. Considérons en effet une valeur de $n$, suffisamment grande ; pour une grande valeur de $\gamma$, l'onde serait très courte, deux satellites voisins pourraient se rapprocher d'une manière sensible, et leur action mutuelle ne serait plus négligeable par rapport à l'action de Saturne.

La masse totale $\mu p$ doit être inférieure à $\frac{2,3}{p^2}$ ; si on suppose $p = 100$, on voit que la masse de l'anneau devra être inférieure à $\frac{2,3}{10\,000}$, c'est un inconvénient de la théorie de Maxwell ; mais c'est un inconvénient artificiel, car l'hypothèse que nous avons faite est trop simple et il faut supposer une distribution de satellites occupant un certain volume de l'espace.

La perturbation apportée au mouvement d'un satellite par l'action d'un autre est de l'ordre de $\frac{\mu}{\delta^3}$, en appelant $\delta$ la distance des satellites.

Si les satellites sont répartis sur une circonférence de longueur $l$, on a $\delta = \frac{l}{p}$ : le mouvement sera stable si la perturbation a une valeur moindre qu'un nombre donné A. Dans

l'hypothèse de satellites répartis sur une circonférence, il faut donc que l'on ait

$$\frac{\mu p^3}{l^3} < A$$

ou bien

$$\mu < \frac{A l^3}{p^3}.$$

Si les satellites sont répartis sur une couronne comprise entre deux cercles de distance comparable à la longueur de l'un deux, le nombre des satellites sera comparable à $p^2$. S'ils sont dans un anneau de volume fini, leur nombre sera comparable à $p^3$, la masse de l'anneau sera égale à $\mu p^3$ et la condition de stabilité sera que l'on ait

$$\mu p^3 < A l^3,$$

la masse de l'anneau devra donc être inférieure à un nombre qui ne dépend pas du nombre des satellites.

***Stabilité de l'anneau supposé liquide.*** — Nous allons maintenant, d'après Maxwell, examiner de plus près la stabilité du mouvement, dans le cas où l'on suppose l'anneau, soit fluide, soit composé de corpuscules indépendants. Dans cette partie du travail de Maxwell, les raisonnements ne sont pas tout à fait rigoureux, ni même très clairs, mais on doit en accepter la conclusion; il est probable qu'un calcul rigoureux conduirait à des résultats peu différents de ceux auxquels nous arriverons.

Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point dans le mouvement normal; $u$, $v$, $w$, les composantes de sa vitesse;

$$\begin{array}{lll} x+\xi, & y+\eta, & y+\zeta, \\ u+\dfrac{d\xi}{dt}, & v+\dfrac{d\eta}{dt}, & w+\dfrac{d\zeta}{dt}, \end{array}$$

les mêmes éléments dans le mouvement troublé.

La force vive du système est

$$T = \int \left[ \left(u+\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(v+\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(w+\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 \right] \frac{\rho d\tau}{2};$$

l'énergie potentielle — U est égale à

$$\int \frac{(V+V')(\rho+\rho')}{2} d\tau,$$

en appelant V et $\rho$ le potentiel et la densité dans le mouvement normal, $V+V'$, $\rho+\rho'$, ce que deviennent ces quantités dans le mouvement troublé. V est une somme de quatre intégrales :

$$\int \frac{V\rho d\tau}{2} + \int \frac{V\rho' d\tau}{2} + \int \frac{V'\rho d\tau}{2} + \int \frac{V'\rho' d\tau}{2}.$$

La première intégrale est une constante ne dépendant pas de $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ; la seconde et la troisième sont égales, comme on l'a vu au commencement du cours. Elles représentent la moitié de l'énergie potentielle due à l'attraction de la matière répartie, comme dans le mouvement normal, sur l'excès de matière qu'il y a en chaque point dans le mouvement troublé.

On peut poser en négligeant le cube de $\xi$, $\eta$, $\zeta$,

$$V+V' = V + \xi\frac{\partial V}{\partial x} + \eta\frac{\partial V}{\partial y} + \zeta\frac{\partial V}{\partial z}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum \xi^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sum \eta\zeta \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}.$$

La somme de la seconde et de la troisième intégrale peut donc s'écrire

$$\int \left(\sum \frac{\partial V}{\partial x}\xi + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\xi^2 + \sum \zeta\eta \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\right)\rho d\tau.$$

Il faut maintenant calculer la dernière intégrale ; je peux supposer que le déplacement $\xi$, $\eta$, $\zeta$ est la somme de deux déplacements, l'un dans le sens de la propagation de ce mouvement, l'autre transversalement à ce sens : on posera ainsi :

$$\xi = \xi_1 + \xi_2,$$
$$\eta = \eta_1 + \eta_2,$$
$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2.$$

On sait d'ailleurs, d'après les formules connues des vibrations longitudinales et transversales que

$$\rho\xi_1 dx + \rho\eta_1 dy + \rho\zeta_1 dz = d\theta$$

est une différentielle exacte et que l'on a

$$\frac{d(\rho\xi_2)}{dx} + \frac{d(\rho\eta_2)}{dy} + \frac{d(\rho\zeta_2)}{dz} = 0.$$

On a d'ailleurs la relation

$$\rho' + \frac{d(\rho\xi)}{dx} + \frac{d(\rho\eta)}{dy} + \frac{d(\rho\zeta)}{dz} = 0.$$

Dans ces conditions on peut écrire

$$\int V\rho' d\tau = \frac{1}{8\pi}\int \rho^2 d\tau (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2).$$

Prenons maintenant des axes mobiles tournant avec une vitesse $\omega$ autour de l'axe de l'anneau, l'expression de V ne change pas. T devient dans ces conditions

$$\int \left\{ \left[ u + \frac{d\xi}{dt} - \omega(y+\eta) \right]^2 + \left[ v + \frac{d\eta}{dt} + \omega(x+\xi) \right]^2 + \left( w + \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right\} d\tau.$$

La condition d'équilibre est que

$$\int (T - U)\, dt$$

soit maximum ; si l'on tient compte de la relation

$$\rho\xi_1 dx + \rho\eta_1 dy + \rho\zeta_1 dz = d\theta,$$

on trouve les équations

$$\xi'' - 2\omega\eta' = \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

$$\eta'' + 2\omega\xi' = \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

$$\zeta'' \qquad = \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\partial \theta}{\partial z},$$

P est un polynôme du second degré en $(\xi, \eta, \zeta)$, $\theta$ est une variable auxiliaire liée aux trois premières par la relation.

$$\Delta\theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

***Conclusion.*** — Maxwell est arrivé au résultat suivant : pour que l'équilibre soit stable, on doit avoir : $\rho < \frac{1}{300}$.

Ce résultat est vrai pour un amas de poussières cosmiques comme pour un anneau liquide ; mais il y a une condition de plus pour un anneau liquide : la pression à la surface doit être dirigée vers l'intérieur ; or, Laplace a trouvé pour l'anneau à section elliptique que la densité doit être supérieure à $\frac{1}{2}$, pour l'anneau extérieur et à 2 pour l'anneau intérieur.

On peut alors se demander s'il y a d'autres figures d'équilibre. Rappelons que l'on a trouvé qu'il fallait que

$$\omega^2 < 2\pi\rho.$$

Dans cette formule, $\omega$ doit être pris égal à la vitesse angulaire d'un satellite dont l'orbite coïnciderait avec l'anneau. On a donc, en désignant par M la masse de Saturne et par L le rayon de l'anneau.

$$\omega^2 = \frac{M}{L^3}.$$

Si $\rho_0$ est la densité de Saturne, R son rayon, on a

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0.$$

On trouve donc

$$2\pi\rho > \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{L^3}\rho_0,$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{2}{3}\left(\frac{R}{L}\right)^3.$$

Le second membre est supérieur à $\frac{1}{16}$ : si on rapproche ce résultat du résultat précédent, on voit que l'anneau de Saturne ne peut être liquide. On a d'ailleurs vu plus haut que les observations montraient qu'il était probablement composé d'une masse de petits corpuscules.

# TABLE DES MATIÈRES

## CHAPITRE PREMIER

### THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LE POTENTIEL NEWTONIEN


Objet du cours . . . . . 1
Définition et propriétés du potentiel . . . . . 1
Théorème de Gauss . . . . . 3
Théorème de Green . . . . . 4
Travail de l'attraction . . . . . 6
Conditions d'équilibre . . . . . 8
Relation entre la masse, le volume et la vitesse de rotation . . . . . 11


## CHAPITRE II

### MASSE HOMOGÈNE FLUIDE

*La masse est sans mouvement de rotation.*


Simplification des formules générales . . . . . 13
Théorie de Liapounoff . . . . . 14
L'énergie a un maximum . . . . . 15
La capacité électrique a un minimum . . . . . 17
Le minimum est atteint pour la sphère . . . . . 20
La sphère est la seule figure d'équilibre . . . . . 22


*La masse est animée d'un mouvement de rotation.*


Formules générales . . . . . 24
Limite de la vitesse de rotation . . . . . 27
Permanence de l'axe de rotation . . . . . 28
Stabilité de l'équilibre . . . . . 31
Solide équivalent . . . . . 31
Condition de stabilité de Lejeune-Dirichlet . . . . . 33
L'axe de rotation est le petit axe de l'ellipsoïde d'inertie . . . . . 35

## CHAPITRE III

### FONCTIONS SPHÉRIQUES

Expression de $\Delta V$ dans un système triple orthogonal . . . . . 39
Polynomes sphériques. Fonctions sphériques . . . . . 41
Fonctions sphériques fondamentales. . . . . 43
Détermination des polynomes $X_n^p$. . . . . 45
Propriétés des fonctions sphériques. . . . . 47
Couche sphéroïdale. . . . . 48
Développement en série de $\frac{1}{MM'}$ . . . . . 48
Développement en série du potentiel d'une couche sphéroïdale. . . . 49
Potentiel en un point de la couche sphéroïdale. . . . . 52
Théorème de Laplace. . . . . 56

## CHAPITRE IV

### MASSE FLUIDE HÉTÉROGÈNE. — PROBLÈME DE CLAIRAUT

Préliminaires. . . . . 59
Développement du potentiel en série . . . . . 61
Détermination des coefficients du développement. . . . . 63
Les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes . . . . . 65
Équation de Clairaut . . . . . 67
Limites de $\eta$. . . . . 69
Forme des courbes intégrales . . . . . 75
Une seule est acceptable. . . . . 78
Relation entre l'aplatissement, la pesanteur et la force centrifuge à l'équateur . . . . . 81
Détermination complète des coefficients H. . . . . 83
Détermination précise de l'aplatissement. . . . . 85
Moments d'inertie de l'ellipsoïde. . . . . 88
Comparaison de la théorie et des observations. . . . . 91

## CHAPITRE V

### MASSE SOLIDE RECOUVERTE D'UNE MASSE FLUIDE

Théorème de Stokes. . . . . 97
Développement de $\frac{1}{MM'}$ en série de polynomes . . . . . 98
Application. . . . . 101
Relation entre l'aplatissement, la pesanteur et la force centrifuge à l'équateur. . . . . 103

Pesanteur en un point de la surface . . . . . 107
Influence de l'altitude . . . . . 108
Pesanteur en un point de la surface du géoïde . . . . . 110

## CHAPITRE VI

### FONCTIONS DE LAMÉ

Coordonnées elliptiques . . . . . 113
Élément linéaire en coordonnées elliptiques . . . . . 115
Équation de Laplace . . . . . 116
Fonctions de Lamé . . . . . 117
Leur formation . . . . . 120
Détermination de K . . . . . 121
Analogie avec les fonctions sphériques . . . . . 122
Cas des ellipsoïdes de révolution . . . . . 124
Résumé . . . . . 126
Les valeurs de K sont réelles . . . . . 127
Les fonctions de Lamé sont linéairement indépendantes . . . . . 128
Les polynomes de Lamé ont leurs racines réelles . . . . . 129
Développement d'une fonction en une somme de fonctions de Lamé . . 131
Les fonctions S . . . . . 134

## CHAPITRE VII

### ATTRACTION DES ELLIPSOÏDES

*Figures d'équilibre.*

Problème de Dirichlet sur l'ellipsoïde . . . . . 136
Application . . . . . 138
Attraction d'un ellipsoïde homogène . . . . . 140
Théorème d'Ivory . . . . . 142
Ellipsoïde de Mac Laurin . . . . . 143
Ellipsoïde de Jacobi . . . . . 146
Discussion de l'équation des ellipsoïdes de Jacobi . . . . . 150
Figures dérivées de l'ellipsoïde de Mac Laurin . . . . . 153
Figures dérivées de l'ellipsoïde de Jacobi . . . . . 156

*Stabilité des figures trouvées.*

Représentation graphique des résultats précédents . . . . . 162
Courbes d'équilibre . . . . . 164
Echange des stabilités . . . . . 167
Stabilité de l'équilibre des figures trouvées . . . . . 170
Conclusion . . . . . 171

## CHAPITRE VIII

### ANNEAU DE SATURNE

*Hypothèse de l'anneau solide.*

Historique . . . . . 173
Équations du mouvement . . . . . 173
Stabilité du mouvement . . . . . 175

*Anneau liquide.*

Potentiel d'une circonférence homogène . . . . . 181
Masse annulaire de révolution . . . . . 185
Section méridienne de l'anneau . . . . . 190

*Hypothèse de Cassini.*

Vraisemblance de l'hypothèse . . . . . 193
Equations du mouvement . . . . . 194
Changement de variables . . . . . 197
Discussion des équations . . . . . 200
Stabilité de l'anneau supposé liquide . . . . . 203
Conclusion . . . . . 205

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

# ERRATA

Page 30, ligne 15 en remontant. — *Au lieu de* $-\omega'_3 x$, *il faut* $-\omega'_3 z$.

Page 37, ligne 10 en remontant. — *Au lieu de* $\frac{\mu^2 \delta J}{J^2}$, *il faut* $\frac{\mu^2 \delta J}{2J^2}$.

Page 103, ligne 3 en remontant. — *Au lieu de* $\frac{1}{2r^5}$, *il faut* $-\frac{1}{2r^5}$.

Page 104, lignes 6 et 10. —

$$\textit{Au lieu de } -6\sum\frac{xy}{r^5}\int x'y'\rho'd\tau', \textit{ il faut } 3\sum\frac{xy}{r^5}\int x'y'\rho'd\tau.$$

Page 105. — La dernière formule de la page doit être $r = r_1\left(1 + \frac{e_1 Y}{3}\right)$.

Page 107. — Les dernières formules de la page renferment quelques erreurs de signe faciles à apercevoir, d'où il suit pour la formule finale

$$\frac{g}{g_0} = 1 - \frac{2\varphi}{3} + \frac{Y}{3}\left(e_1 + \frac{5\varphi}{2}\right).$$

Page 124, ligne 10 en remontant. — Le numérateur de la fraction sous le second radical doit être $a^2 - c^2$.

Page 128, ligne 12. — *Lire* $S'' + (H\rho^2 + K)\,S = 0$. La formule suivante doit être $R''S - S''R = 0$, d'où en intégrant $R'S - S'R = \alpha$.

Page 134, lignes 12 et 15. — *Lire* $S'R - R'S$.

Page 137, ligne 7. — Mettre le signe — devant $l$.

Page 187, ligne 7. — Dans le dernier terme de la ligne, *il faut* $x + x'$ *au lieu de* $x - x'$.

5977

P751

QB
410
P75
c.2

[redacted] C.2
Figures d'equilibre d'une mass
Stanford University Libraries
3 6105 030 950 575

[redacted]

Stanford University Libraries
Stanford, California

Return this book on or before date due.

[redacted]
[redacted]
[redacted]
[redacted]
[redacted]
JUL 1 5 1998

[redacted]